Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Farwig
Raphael Schulz, Felix Riechwald

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009
28. Januar 2009

13. Tutorium zur „Analysis I (deutsch)“

T37 (Satz von Dini)

Der folgende Satz ist als *Satz von Dini* bekannt:
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine punktweise konvergente Funktionenfolge stetiger Funktionen mit Definitionsbereich D, die punktweise gegen eine Grenzfunktion f konvergiert. Wir nehmen zusätzlich an:

(a) Der Definitionsbereich D ist kompakt.

(b) Die Grenzfunktion f ist stetig.

(c) Die Konvergenz ist monoton, das heißt $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ für alle $x \in D$ und alle $n \in \mathbb{N}$ oder $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ für alle $x \in D$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann konvergiert die Funktionenfolge sogar gleichmäßig gegen f.

i) Zeige, dass jede einzelne der Annahmen (a), (b) und (c) nötig ist, finde also Beispiele für punktweise konvergente Funktionenfolgen, die nur eine der Bedingungen (a), (b) oder (c) verletzen und die trotzdem nicht gleichmäßig konvergieren.

ii) Beweise den Satz von Dini.

iii) Seien $f_n\colon [a,b] \to [0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, stetig und nehmen wir an, dass $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ punktweise konvergiert mit stetiger Grenzfunktion f. Zeige: Die Reihe konvergiert gleichmäßig.

Lösung:

i) Mit $f_n(x) := e^{x-n}$, $D = \mathbb{R}$ ist (b) und (c) erfüllt, aber nicht (a).
Mit $f_n(x) = x^n$, $D = [0,1]$ ist (a) und (c) erfüllt, aber nicht (b).
Das Beispiel Nr. 3 auf Seite 135 mit $D = [0,1]$ im Skript erfüllt (a) und (b), aber nicht (c).
Alle diese Folgen konvergieren nur punktweise, aber nicht gleichmäßig.

ii) Der Beweis steht auf Seite 139 im Skript.

iii) Dies ist eine direkte Anwendung des Satzes von Dini auf die Folge der Partialsummen $F_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$.

T38 (Eulersche Zahlen)

Die als Potenzreihe definierte Funktion $\cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ ist aus der Vorlesung bekannt. Da $\cos(0) = 1 \neq 0$, folgt (ohne dass wir es hier beweisen), dass der Kehrwert $\frac{1}{\cos}$

ebenfalls als Potenzreihe entwickelbar ist. Da cos eine gerade Funktion ist, gilt dies auch für $\frac{1}{\cos}$. Damit erhalten wir die Darstellung

$$\frac{1}{\cos(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k}$$

für eindeutig bestimmte reelle Zahlen b_k, $k \in \mathbb{N}_0$. Die Zahlen E_{2k}, $k \in \mathbb{N}_0$, definiert durch

$$E_{2k} := (-1)^k b_k (2k)!,$$

heißen die *Eulerschen Zahlen.*
Finde mit Hilfe des Cauchyproduktes eine Rekursionsformel für die Eulerschen Zahlen. Berechne damit E_0, E_2, E_4 und E_6. Zeige, dass alle Eulerschen Zahlen ganze Zahlen sind. Zeige außerdem, dass $\limsup_k |E_{2k}| = \infty$.
Hinweis: Benutze ohne Beweis, dass Koeffizientenvergleich für Potenzreihen möglich ist. Das heißt: Falls $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ für alle x im Konvergenzbereich, dann gilt schon $a_k = b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dies ist der Identitätssatz für Potenzreihen auf Seite 150 im Skript.

Lösung: Es gilt

$$1 = \cos(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k E_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \right)$$

und wir berechnen die rechte Seite mit Hilfe des Cauchyproduktes:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k E_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(2(n-k))!} x^{2(n-k)} \frac{(-1)^k E_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n E_{2k}}{(2k)!(2(n-k))!} \right) x^{2n}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^0 E_{2k}}{(2k)!(2(0-k))!} = E_0 \qquad \text{und} \\ 0 &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n E_{2k}}{(2k)!(2(n-k))!} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, n \geq 1. \end{aligned}$$

Diese lassen sich in ein Rekursionsschema umformen:

$$E_0 = 1, \quad E_{2n} = -(2n)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{E_{2k}}{(2k)!(2(n-k))!} = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k} E_{2k}, \quad n > 1.$$

Dieses Schema zeigt (mit Induktion), dass die Eulerschen Zahlen ganze Zahlen sind. Wir berechnen mit Hilfe des Schemas:

$$E_0 = 1, \quad E_2 = -1, \quad E_4 = 5, \quad E_6 = -61.$$

Um die Asymptotik zu untersuchen, bemerken wir zunächst, dass $1/\cos(x)$ höchstens einen Konvergenzradius von $\pi/2$ haben, kann, da die Funktion im Punkte $x = \pi/2$ nicht definiert werden kann. Daraus folgt, dass $\limsup_k \sqrt[k]{|b_k|} \geq 2/\pi$. Nehmen wir nun an, $\limsup_k |E_{2k}| = K < \infty$ und führen einen Widerspruch wie folgt herbei:

$$\frac{2}{\pi} \leq \limsup_k \sqrt[k]{|b_k|} = \limsup_k \sqrt[k]{\frac{|E_{2k}|}{(2k)!}} \leq \limsup_k \frac{\sqrt[k]{K+1}}{\sqrt[k]{(2k)!}} = 0.$$

Dieses Argument zeigt sogar die wesentlich stärkere Aussage, dass $|E_{2k}|$ ”mindestens so schnell” wächst wie $(2k)!$. Man kann sogar zeigen, dass E_{2k} sich für große Werte k an $(-1)^k 8\sqrt{\frac{k}{\pi}}\left(\frac{4k}{\pi e}\right)^{2k}$ annähert.