Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Farwig
Raphael Schulz, Felix Riechwald

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009
21. Januar 2009

12. Tutorium zur „Analysis I (deutsch)“

T34 (Gleichmäßige Konvergenz)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeige: Die Folge

$$f_n(x) := n\left(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

konvergiert punktweise gegen die Ableitung f' von f. Zeige außerdem: Falls f' gleichmäßig stetig ist, dann konvergiert f_n sogar gleichmäßig gegen f'.

Lösung: Die Funktionen f_n sind gerade die speziellen Differenzenquotienten $f_n(x) = \frac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}$ und also konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Folge $f_n(x)$ gegen $f'(x)$. Dies beweist die erste Aussage.

Nehmen wir nun an, dass f' gleichmäßig stetig ist. Wir benutzen den ersten Mittelwertsatz und erhalten für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Zwischenstelle ξ_n mit $x \leq \xi_n \leq x + 1/n$, so dass $f(x+1/n) - f(x) = f'(\xi_n) \cdot (1/n)$ und also $f_n(x) = f'(\xi_n)$. Wir erhalten also

$$|f_n(x) - f'(x)| = |f'(\xi_n) - f'(x)|.$$

Sei nun $\epsilon > 0$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f' existiert ein $\delta > 0$, so dass $|f(y) - f(z)| < \epsilon$, falls $|y - z| < \delta$. Wir wählen nun ein $N \geq 1/\delta$ und dann gilt für alle $n \geq N$, dass $|\xi_n - x| \leq 1/n \leq 1/N \leq \delta$ und also

$$|f_n(x) - f'(x)| = |f'(\xi_n) - f'(x)| < \epsilon$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \geq N$. Da die Wahl von N nicht von x abhing (wegen der *gleichmäßigen* Stetigkeit von f'), ist die Konvergenz tatsächlich gleichmäßig.

T35 (Satz von Darboux)

Wir betrachten eine in (a,b) differenzierbare Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ und stellen uns die Frage, ob man Aussagen über die Eigenschaften von f' treffen kann, ohne weitere Voraussetzungen (außer Differenzierbarkeit an f) zu stellen.

i) Angenommen es gibt zwei Punkte $x_1, x_2 \in (a,b)$ mit $x_1 < x_2$, so dass $f'(x_1) > 0$ und $f'(x_2) < 0$. Man zeige, dass dann ein Punkt $x_0 \in (x_1, x_2)$ mit der Eigenschaft $f'(x_0) = 0$ existiert.

Für stetige Ableitungen ist diese Aussage eine sofortige Konsequenz des Zwischenwertsatzes. Wir setzen an dieser Stelle die Stetigkeit von f' aber nicht voraus; sie folgt auch nicht aus den Voraussetzungen.

ii) Beweise den *Satz von Darboux*: Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sei in (a, b) differenzierbar. Angenommen es gibt zwei Punkte $x_1, x_2 \in (a, b)$ mit $x_1 < x_2$, so dass $f'(x_1) > f'(x_2)$. Dann existiert für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $f'(x_2) < \lambda < f'(x_1)$ ein Punkt $x_\lambda \in (x_1, x_2)$, so dass $\lambda = f'(x_\lambda)$.

Der Satz von Darboux bedeutet keinesfalls, dass die Ableitung einer differenzierbaren Funktion stetig ist. Nun zeige, dass aber die folgende Aussage gilt:

iii) Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sei in (a, b) differenzierbar. Dann besitzt deren Ableitung f' keine Sprungstellen.
Dabei heißt ein Punkt $x_0 \in [a, b]$ eine *Sprungstelle* der Funktion f, falls die einseitigen Grenzwerte der Funktion in x_0 existieren, aber ungleich sind, also

$$\lim_{x\to x_0-} f'(x) \neq \lim_{x\to x_0+} f'(x).$$

Lösung:

i) Aus der Differenzierbarkeit von f in (a, b) folgt die Stetigkeit von f in (a, b) und damit auch die Stetigkeit von f auf $[x_1, x_2]$. Wegen der Kompaktheit des Intervalls $[x_1, x_2]$ existiert damit ein $x_0 \in [x_1, x_2]$ mit $f(x_0) = \max_{x\in[x_1,x_2]} f(x)$. Gilt dabei $x_0 \in (x_1, x_2)$, so folgt $f'(x_0) = 0$. Angenommen es gelte $x_0 = x_1$ oder $x_0 = x_2$. Wir untersuchen zunächst den ersten dieser beiden Fälle. Dann folgt

$$\phi(f; h, x_1) := \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \leq 0 \qquad \text{für } x_1 + h \in (x_1, x_2).$$

Dies impliziert wegen der Differenzierbarkeit von f im Punkt x_1, dass

$$f'(x_1) = f'(x_1 + 0) = \lim_{h\to 0+} \phi(f; h, x_1) \leq 0,$$

was der Voraussetzung des Satzes widerspricht! Auf gleichem Wege führt $x_0 = x_2$ zu Widerspruch.

ii) Wenden wir die Aussage aus Teilaufgabe i) auf die Funktion $\tilde{f}(x) := f(x) - \lambda x$ an, so existiert ein $x_\lambda \in (x_1, x_2)$ mit $\tilde{f}'(x_\lambda) = 0$ bzw. $f'(x_\lambda) = \lambda$.

iii) Angenommen für einen Punkt $x_0 \in (a, b)$ existieren die Grenzwerte $\lim_{x\to x_0+} f'(x)$ und $\lim_{x\to x_0-} f'(x)$, sind aber nicht gleich. OBdA sei $\lim_{x\to x_0+} f'(x) < \lim_{x\to x_0-} f'(x)$ (andernfalls betrachten wir die Funktion $-f$ anstatt f). Wir wählen

$$\varepsilon := \frac{1}{3}\left(\lim_{x\to x_0-} f'(x) - \lim_{x\to x_0+} f'(x)\right) > 0$$

und finden nach der Definition einseitiger Grenzwerte ein $\delta > 0$, so dass

$$f'(x) \in U_\varepsilon(\lim_{x\to x_0-} f'(x)) \qquad \text{für } x \in U_\delta(x_0) \cap (a, x_0),$$
$$f'(x) \in U_\varepsilon(\lim_{x\to x_0+} f'(x)) \qquad \text{für } x \in U_\delta(x_0) \cap (x_0, b).$$

Wählt man nun $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0) \cap (a, x_0)$, $x_2 \in (x_0, x_0 + \delta) \cap (x_0, b)$ sowie $\lambda \in (\lim_{x\to x_0+} f'(x) + \varepsilon, \lim_{x\to x_0-} f'(x) - \varepsilon)$, so erhält man $f'(x_1) > f'(x_2)$ aber $f'(x) \neq \lambda$. Dies steht aber im Widerspruch zum Satz von Darboux (s. Teilaufgabe ii))!

T36 (Newton-Verfahren)
Häufig lassen sich Nullstellen einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nicht analytisch ermitteln, sondern nur approximieren. Ein bekanntes Verfahren dafür ist das Newton-Verfahren, welches bei beliebigem Startwert $x_0 \in [a, b]$ durch die folgende Iterationsvorschrift definiert wird:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Dieses Verfahren wollen wir nun genauer studieren. Hierfür zeige man unter den Voraussetzungen, dass f zweimal stetig differenzierbar ist, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ und $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$:

i) Das Babylonische Wurzelziehen für ein $d > 0$ (vgl. 5. Tutorium, T16) ist genau die Anwendung des Newton-Verfahrens auf eine geeignete Funktion.

ii) Mit obigen Voraussetzungen gibt es genau eine Nullstelle $\xi \in [a, b]$, d.h. $f(\xi) = 0$.

iii) Wählen wir einen beliebigen Anfangspunkt x_0 mit $f(x_0) \geq 0$, so ist die durch obige Iterationsvorschrift gegebene Folge $(x_n)_n$ wohldefiniert und konvergiert monoton fallend gegen ξ.
Hierfür gehe man wie folgt vor:

a) Zeige mit vollständiger Induktion, dass $\xi \leq x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. (*Hinweis:* Um die erste Ungleichung im Induktionsschritt nachzuweisen, verwende die Hilfsfunktion

$$\phi(x) := f(x) - f(x_n) - f'(x_n)\,(x - x_n)$$

und schließe mit dieser, dass $f(x_{n+1}) \geq 0$.)

b) Zeige nun, dass die Folge gegen ξ konvergiert.

Lösung:

i) Mit der Funktion $f(x) = x^2 - d$ auf $[0, d]$ und mit $x_0 = d$ ergibt sich im Newtonverfahren die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - d}{2x_n} = x_n - \frac{1}{2}x_n - \frac{1}{2}\frac{d}{x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{d}{x_n}\right).$$

Die Funktion f erfüllt außerdem auch alle anderen geforderten Bedinungen. Also handelt es sich beim Verfahren in T16 um das Newtonverfahren. In der Tat haben wir da gezeigt, dass die Folge $(x_n)_n$ gegen die Nullstelle $\sqrt{d}$ von f konvergiert.

ii) Da $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$, ist die Funktion f' im Intervall $[a, b]$ monoton wachsend. Da $[a, b]$ kompakt ist, besitzt die Funktion f ein Minimum q mit $f(q) := \min_{x\in[a,b]} f(x) < 0$.
Falls $q \neq a$, gilt $f'(q) = 0$, also $f'(x) \leq 0$ für $x \leq q$. Die Funktion f ist also im Intervall $[a, q]$ monoton fallend und kann dort keine Nullstelle haben.
In jedem Fall liegen alle Nullstellen von $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ im Intervall (q, b) und nach dem Zwischenwertsatz gibt es dort mindestens eine Nullstelle. Wir müssen noch zeigen, dass nicht mehr als eine Nullstelle existieren kann. Angenommen, es gäbe zwei (oder mehr) Nullstellen $\xi_1 < \xi_2$ von f. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $t \in (q, \xi_1)$ mit

$$f'(t) = \frac{f(\xi_1) - f(q)}{\xi_1 - q} = -\frac{f(q)}{\xi_1 - q} > 0,$$

also gilt auch $f'(x) > 0$ für alle $x \geq \xi_1$. Die Funktion f ist also im Intervall $[\xi_1, b]$ streng monoton wachsend und kann keine zweite Nullstelle $\xi_2 > \xi_1$ besitzen.

iii) a) Sei $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) \geq 0$. Dann ist notwendig $x_0 \geq \xi$. Wir beweisen durch Induktion, dass für die durch

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

definierte Folge gilt $f(x_n) \geq 0$ und $\xi \leq x_n \leq x_{n-1}$ für alle n.
Induktionsschritt $n \to n+1$: Aus $x_n \geq \xi$ folgt $f'(x_n) \geq f'(\xi) > 0$, also $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \geq 0$ und daher $x_{n+1} \leq x_n$.
Als nächstes zeigen wir $f(x_{n+1}) \geq 0$. Dazu betrachten wir die Hilfsfunktion

$$\phi(x) := f(x) - f(x_n) - f'(x_n)\,(x - x_n)\,.$$

Wegen der Monotonie von f' gilt

$$\phi'(x) = f'(x) - f'(x_n) \leq 0 \qquad \text{für } x \leq x_n.$$

Da $\phi(x_n) = 0$, ist $\phi(x) \geq 0$ für $x \leq x_n$, also insbesondere

$$0 \leq \phi(x_{n+1}) = f(x_{n+1}) - f(x_n) - f'(x_n)\,(x_{n+1} - x_n) = f(x_{n+1}).$$

Wegen $f(x_{n+1}) \geq 0$ muss aber $x_{n+1} \geq \xi$ gelten, da man sonst einen Widerspruch zum Zwischenwertsatz erhielte.

b) Wir haben damit bewiesen, dass die Folge $(x_n)_n$ monoton fällt und durch ξ nach unten beschränkt ist. Also existiert ein Grenzwert $\tilde{x} := \lim_{n\to\infty} x_n$ dieser Folge. Weiter gilt

$$\tilde{x} = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\tilde{x})}$$

(f und f' sind stetig!), also $f(\tilde{x})$=0, und wegen der Eindeutigkeit der Nullstelle (s. Teilaufgabe ii)) ist $\tilde{x} = \xi$.