Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Farwig
Raphael Schulz, Felix Riechwald

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009
21. Januar 2009

12. Tutorium zur „Analysis I (deutsch)“

T34 (Gleichmäßige Konvergenz)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeige: Die Folge

$$f_n(x) := n\left(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

konvergiert punktweise gegen die Ableitung f' von f. Zeige außerdem: Falls f' gleichmäßig stetig ist, dann konvergiert f_n sogar gleichmäßig gegen f'.

T35 (Satz von Darboux)

Wir betrachten eine in (a, b) differenzierbare Funktion $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ und stellen uns die Frage, ob man Aussagen über die Eigenschaften von f' treffen kann, ohne weitere Voraussetzungen (außer Differenzierbarkeit an f) zu stellen.

i) Angenommen es gibt zwei Punkte $x_1, x_2 \in (a, b)$ mit $x_1 < x_2$, so dass $f'(x_1) > 0$ und $f'(x_2) < 0$. Man zeige, dass dann ein Punkt $x_0 \in (x_1, x_2)$ mit der Eigenschaft $f'(x_0) = 0$ existiert.

Für stetige Ableitungen ist diese Aussage eine sofortige Konsequenz des Zwischenwertsatzes. Wir setzen an dieser Stelle die Stetigkeit von f' aber nicht voraus; sie folgt auch nicht aus den Voraussetzungen.

ii) Beweise den *Satz von Darboux*: Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sei in (a, b) differenzierbar. Angenommen es gibt zwei Punkte $x_1, x_2 \in (a, b)$ mit $x_1 < x_2$, so dass $f'(x_1) > f'(x_2)$. Dann existiert für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $f'(x_2) < \lambda < f'(x_1)$ ein Punkt $x_\lambda \in (x_1, x_2)$, so dass $\lambda = f'(x_\lambda)$.

Der Satz von Darboux bedeutet keinesfalls, dass die Ableitung einer differenzierbaren Funktion stetig ist. Nun zeige, dass aber die folgende Aussage gilt:

iii) Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sei in (a, b) differenzierbar. Dann besitzt deren Ableitung f' keine Sprungstellen.
Dabei heißt ein Punkt $x_0 \in [a, b]$ eine *Sprungstelle* der Funktion f, falls die einseitigen Grenzwerte der Funktion in x_0 existieren, aber ungleich sind, also

$$\lim_{x\to x_0-} f'(x) \neq \lim_{x\to x_0+} f'(x).$$

T36 (Newton-Verfahren)

Häufig lassen sich Nullstellen einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nicht analytisch ermitteln, sondern nur approximieren. Ein bekanntes Verfahren dafür ist das Newton-Verfahren, welches bei beliebigem Startwert $x_0 \in [a, b]$ durch die folgende Iterationsvorschrift definiert wird:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Dieses Verfahren wollen wir nun genauer studieren. Hierfür zeige man unter den Voraussetzungen, dass f zweimal stetig differenzierbar ist, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ und $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$:

i) Das Babylonische Wurzelziehen für ein $d > 0$ (vgl. 5. Tutorium, T16) ist genau die Anwendung des Newton-Verfahrens auf eine geeignete Funktion.

ii) Mit obigen Voraussetzungen gibt es genau eine Nullstelle $\xi \in [a, b]$, d.h. $f(\xi) = 0$.

iii) Wählen wir einen beliebigen Anfangspunkt x_0 mit $f(x_0) \geq 0$, so ist die durch obige Iterationsvorschrift gegebene Folge $(x_n)_n$ wohldefiniert und konvergiert monoton fallend gegen ξ.
Hierfür gehe man wie folgt vor:

   a) Zeige mit vollständiger Induktion, dass $\xi \leq x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.
   (*Hinweis:* Um die erste Ungleichung im Induktionsschritt nachzuweisen, verwende die Hilfsfunktion

   $$\phi(x) := f(x) - f(x_n) - f'(x_n)\,(x - x_n)$$

   und schließe mit dieser, dass $f(x_{n+1}) \geq 0$.)

   b) Zeige nun, dass die Folge gegen ξ konvergiert.