Analysis I für M, LaG, Ph

11. Tutorium

Lösungsvorschlag

T31 Logarithmisches Ableiten

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion ohne Nullstellen. Dann ist $\log(|f|)$ differenzierbar auf I und es gilt

$$(\log(|f|))' = \frac{f'}{f}.$$

Der Quotient $\frac{f'}{f}$ heißt daher *logarithmische Ableitung* von f bzw. $|f|$.

i) Es sei $f = \prod_{k=1}^{n} f_k$ ein endliches Produkt differenzierbarer Funktionen auf I ohne Nullstellen. Zeige, dass dann gilt

$$\frac{f'}{f} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'}{f_k}.$$

ii) Sei $c \in \mathbb{R}$. Finde alle Lösungen der Differentialgleichung

$$f' = cf.$$

i) Es gilt mit der Funktionalgleichung des Logarithmus

$$\frac{f'}{f} = (\log(|f|))' = \left(\sum_{k=1}^{n} \log(|f_k|)\right)' = \sum_{k=1}^{n} (\log(|f_k|))' = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'}{f_k}.$$

Auch für Funktionen f_k mit Nullstellen gilt die Produktregel

$$f' = \sum_{k=1}^{n} f_1 \cdot ... \cdot f_{k-1} \cdot f_k' \cdot f_{k+1} \cdot ... \cdot f_n,$$

wie man leicht durch Induktion über n bestätigt.

ii) Zunächst zeigen wir, dass falls die Lösung f eine Nullstelle besitzt sie bereits identisch Null ist. Angenommen f habe in $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle. Aus der Differentialgleichung folgt, dass f beliebig oft stetig differenzierbar ist:

$$f^{(k)} = (cf)^{(k-1)} = ... = c^k f.$$

Demnach verschwinden im Punkt x_0 auch alle Ableitungen: $f^{(k)}(x_0) = c^k f(x_0) = 0$. Entwickeln wir nun das Taylor-Polynom der Funktion f vom Grad n um den Punkt x_0, so erhalten wir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\eta_n)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = \frac{c^{n+1} f(\eta_n)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit einem η_n zwischen x_0 und x. Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ für alle $b \in \mathbb{R}$ (folgt aus der Konvergenz der Exponentialreihe). Die stetige Funktion $|f|$ besitzt auf dem kompakten Intervall $[x, x_0]$ (falls $x < x_0$) bzw. $[x_0, x]$ (falls $x > x_0$)

ein Maximum $F := \max_{y\in[x,x_0]} |f(y)| \geq f(\eta_n)$. Damit erhalten wir die Konvergenz des Restglieds und den Funktionswert von f an der Stelle x:

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c^{n+1} f(\eta_n)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leq F \lim_{n\to\infty} \frac{|c(x-x_0)|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Die Funktion ist nun also identisch Null.

Nun habe f keine Nullstelle. Die Lösungen der Gleichung $f' = cf$ können wir wie folgt finden. Wir schreiben $f' = cf$ als $c = \frac{f'}{f} = (\log(|f|))' = g'$ mit der Hilfsfunktion $g := \log(|f|)$. Die Lösungen für die Gleichung $g' = c$ können wir sofort angeben: $g(x) = cx + a$ mit $a \in \mathbb{R}$. Denn nach dem Mittelwertsatz gilt $g(x) = g'(\xi)x + g(0) = cx + a$ mit ξ zwischen 0 und x sowie einer Konstanten $a = g(0)$. Hieraus folgt

$$|f(x)| = e^{g(x)} = e^{cx+a} = Ae^{cx}$$

mit einer positiven Konstanten $A := e^a > 0$. Angenommen für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ sei $f(x_0) > 0$, so ist nach dem Zwischenwertsatz $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Denn gäbe es ein $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ mit $f(\tilde{x}) < 0$, so hätte f auch eine Nullstelle. (Widerspruch zur Voraussetzung!) In diesem Fall haben wir $f(x) = Ae^{cx}$. Analog argumentiert man, falls es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x_0) < 0$. In diesem Fall ist also $f(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und wir haben $f(x) = -Ae^{cx}$.
Nehmen wir nun diese Ergebnisse zusammen, so sind die einzigen Lösungen der Differentialgleichung $f' = cf$ die Exponentialfunktionen

$$f(x) = \tilde{C}e^{cx}$$

mit $\tilde{C} \in \mathbb{R}$.

***Alternativer Beweis:** Definieren wir $g(x) := f(\frac{x}{c})$, dann gilt*

$$g'(x) = \frac{1}{c} f'(\frac{x}{c}) = c \cdot \frac{1}{c} f(\frac{x}{c}) = g(x).$$

Wir wissen, dass die Funktion g die Form $g(x) = \tilde{C}e^x$ für ein $\tilde{C} \in \mathbb{R}$ hat (s. Skript S. 119). Demnach hat die Lösung f die Form

$$f(x) = g(cx) = \tilde{C}e^{cx}.$$

T32 Taylor-Polynome

i) Wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass g auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist, bestimme $g^{(n)}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie die Taylor-Polynome von g im Nullpunkt. Verschwindet das Restglied, d.h., gilt $\lim_{n\to\infty} (R_n g)(x, 0) = 0$ in einer Umgebung von 0?

ii) Beweise für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$e \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e}{(n+1)!}.$$

iii) Berechne nun mit Aufgabenteil ii)

$$\lim_{n\to\infty} (n!e - \lfloor n!e \rfloor).$$

i) ***Behauptung:*** *Die Funktion g ist unendlich oft differenzierbar und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es ein Polynom P_n mit*

$$g^{(n)}(x) := \begin{cases} \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Beweis: *Wir führen den Beweis über vollständige Induktion. Für $n = 0$ haben wir $P_0 \equiv 1$ (Induktionsanfang). Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ erfülle g die Behauptung (Induktionshypothese). Dann gilt für alle $x \neq 0$*

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) = \left(g^{(n)}\right)'(x) &= \frac{P_n'(x) \cdot x^{3n} - P_n(x) \cdot 3nx^{3n-1}}{x^{6n}} e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} \\ &= \frac{x^3 P_n'(x) - 3nx^2 P_n(x) + 2P_n(x)}{x^{3n+3}} e^{-\frac{1}{x^2}}. \end{aligned}$$

Mit $P_{n+1}(x) := x^3 P_n'(x) - 3nx^2 P_n(x) + 2P_n(x)$ haben wir also wieder ein Ploynom, welches die Behauptung erfüllt.
Nun zur Differenzierbarkeit. Wir müssen zeigen, dass $g^{(n+1)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir haben

$$\frac{g^{(n)}(h) - g^{(n)}(0)}{h} = \frac{\frac{P_n(h)}{h^{3n}} e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = P_n(h) \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{h^{3n+1}}.$$

Setzen wir $t := \frac{1}{h}$, so können wir mit der Hausübung H1 aus der 9. Übung schließen, dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^{3n+1}} = \lim_{t \to \infty} t^{3n+1} e^{-t^2} = 0.$$

Damit haben wir gezeigt, dass g $(n+1)$-mal differenzierbar ist und $g^{(n+1)}(0) = 0$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Das Taylor-Polynom von Grad $n \in \mathbb{N}$ mit Entwicklungspunkt Null ist die konstante Nullfunktion. Nach dem Satz von Taylor haben wir also

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(n)}(0)}{k!} x^k + \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^k = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^k.$$

Da das Restglied für $n \to \infty$ nicht gegen Null konvergiert, konvergiert das Taylor-Polynom in diesem Fall NICHT gegen g.

ii) *Die Exponentialfunktion* exp *ist beliebig oft differenzierbar, daher gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in (0, 1]$ ein $\xi \in (0, x)$ mit*

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{\exp^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Für $x = 1$ existiert insbesondere ein $\xi \in (0, 1)$, so dass

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e}{(n+1)!}.$$

iii) *Wir bemerken zunächst, dass per Definition der Gaußklammer $\lfloor x \rfloor \leq x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Also haben wir für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$0 \leq n!e - \lfloor n!e \rfloor.$$

Mit Aufgabenteil i) erhalten wir außerdem

$$n!e - \lfloor n!e \rfloor \leq n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + n! \frac{e}{(n+1)!} - \lfloor n!e \rfloor = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \frac{e}{n+1} - \lfloor n!e \rfloor.$$

Nun wollen wir den Term $\lfloor n!e \rfloor$ behandeln, hierfür betrachten wir die folgende Ungleichung:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Da die Funktion $\lfloor . \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton steigend ist, gilt weiterhin $\lfloor n!e \rfloor \geq \lfloor n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \rfloor$. Zusammen mit der obigen Abschätzung erhalten wir

$$n!e - \lfloor n!e \rfloor \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \frac{e}{n+1} - \left\lfloor n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \frac{e}{n+1} - \left\lfloor \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \right\rfloor.$$

Die Pointe ist nun, dass $\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \in \mathbb{N}$ und damit ist

$$\left\lfloor \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}.$$

Nun haben wir also $0 \leq \lfloor n!e \rfloor \leq \frac{e}{n+1}$. Da $\frac{e}{n+1}$ eine Nullfolge ist, konvergiert auch $n!e - \lfloor n!e \rfloor$ gegen Null.

T33 Lipschitz-Stetigkeit und Differentiation

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall in $\mathbb{R}$. Im letzten Tutorium haben wir gezeigt, dass Lipschitz-stetige Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig sind. Nun wollen wir den Zusammenhang zwischen Lipschitz-Stetigkeit und Differenzierbarkeit untersuchen:

i) Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Wenn die erste Ableitung beschränkt ist, d.h., es gilt

$$\sup_{x \in I} \left| f'(x) \right| < \infty,$$

dann ist f Lipschitz-stetig.

ii) In der Situation von Teilaufgabe *i)* sei L eine Lipschitzkonstante für f auf I. Dann gilt die Ungleichung

$$\sup_{x \in I} \left| f'(x) \right| \leq L.$$

i) Nach Voraussetzung gibt es ein $M > 0$, so dass $\sup_{x \in I} |f'(x)| < M$. Seien nun $x, y \in I$, dann erhalten wir nach dem Mittelwertsatz ein ξ zwischen x und y, so dass

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = |f'(\xi)| < M.$$

Daraus folgt die Lipschitz-Stetigkeit der Funktion f.

ii) Sei $x \in I$. Wegen der Lipschitz-Stetigkeit von f haben wir sofort

$$|f'(x)| = \lim_{h \to \infty} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} \leq L,$$

da für alle $h > 0$ gilt $|f(x+h) - f(x)| \leq Lh$.