Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Reinhard Farwig
Felix Riechwald
Raphael Schulz

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

14.01.2009

Analysis I für M, LaG, Ph

11. Tutorium

T31 Logarithmisches Ableiten

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion ohne Nullstellen. Dann ist $\log(|f|)$ differenzierbar auf I und es gilt

$$(\log(|f|))' = \frac{f'}{f}.$$

Der Quotient $\frac{f'}{f}$ heißt daher *logarithmische Ableitung* von f bzw. $|f|$.

i) Es sei $f = \prod_{k=1}^{n} f_k$ ein endliches Produkt differenzierbarer Funktionen auf I ohne Nullstellen. Zeige, dass dann gilt

$$\frac{f'}{f} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'}{f_k}.$$

ii) Sei $c \in \mathbb{R}$. Finde alle Lösungen der Differentialgleichung

$$f' = cf.$$

T32 Taylor-Polynome

i) Wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass g auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist, bestimme $g^{(n)}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie die Taylor-Polynome von g im Nullpunkt. Verschwindet das Restglied, d.h., gilt $\lim_{n\to\infty} (R_n g)(x, 0) = 0$ in einer Umgebung von 0?

ii) Beweise für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$e \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e}{(n+1)!}.$$

iii) Berechne nun mit Aufgabenteil ii)

$$\lim_{n\to\infty} (n!e - \lfloor n!e \rfloor).$$

T33 Lipschitz-Stetigkeit und Differentiation

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall in $\mathbb{R}$. Im letzten Tutorium haben wir gezeigt, dass Lipschitz-stetige Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig sind. Nun wollen wir den Zusammenhang zwischen Lipschitz-Stetigkeit und Differenzierbarkeit untersuchen:

i) Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Wenn die erste Ableitung beschränkt ist, d.h., es gilt
$$\sup_{x \in I} \left| f'(x) \right| < \infty,$$
dann ist f Lipschitz-stetig.

ii) In der Situation von Teilaufgabe $i)$ sei L eine Lipschitzkonstante für f auf I. Dann gilt die Ungleichung
$$\sup_{x \in I} \left| f'(x) \right| \le L.$$