Analysis 1 für M, LaG M, Tutorium 10, Lösungsvorschlag

T 29 Gleichmäßige Stetigkeit

Sei $f : K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}$.

Beweise, dass f gleichmäßig stetig ist. Verwende dafür die Folgenkompaktheit der Menge K und nicht deren Überdeckungskompaktheit.

Angenommen f wäre nicht gleichmäßig stetig auf K.

Dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$, so dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Stellen $x_n, y_n \in K$ existierten mit $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ und

$$|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon.$$

Da $(x_n)_n, (y_n)_n \subset K$ Folgen in einer kompakten Menge sind, existieren jeweils konvergente Teilfolgen mit Grenzwerten $x, y \in K$. Wegen $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$, muss $x = y$ gelten.

Seien o. B. d. A. $(x_n)_n, (y_n)_n$ konvergente Folgen mit $x_n \to x$ und $y_n \to y = x$.

Dann gilt gemäß der Dreiecksungleichung

$$|f(x_n) - f(y_n)| \leq |f(x_n) - f(x)| + |\underbrace{f(y)}_{=f(x)} - f(y_n)| \to 0, \qquad n \to \infty,$$

da f stetig ist.

Widerspruch (zu $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$)

T 30 Lipschitz-Stetigkeit

Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ wird *Lipschitz-stetig* genannt, falls eine positive reelle Zahl L existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in D.$$

Die Zahl L heißt eine *Lipschitz-Konstante* von f.

a) Finde eine Lipschitz-stetige Funktion, die nicht differenzierbar ist. Gib außerdem eine stetige Funktion an, die nicht Lipschitz-stetig ist.

b) Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion. Zeige, dass f gleichmäßig stetig ist.

   Gilt die Umkehrung dieser Aussage?

c) Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetige Funktionen. Zeige, dass die Funktion

$$f + g\colon D \to \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

   ebenfalls Lipschitz-stetig ist.

   Finde Lipschitz-stetige Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $f \cdot g$ nicht Lipschitz-stetig ist.

d) Zeige, dass eine Lipschitz-stetige Funktion, die auf einem beschränkten Intervall definiert ist, beschränkt ist.

Seien nun $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetige Funktionen auf einem beschränkten Intervall D. Zeige, dass die Funktion

$$f \cdot g\colon D \to \mathbb{R}, \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

ebenfalls Lipschitz-stetig ist.

e) Zeige, dass jedes Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ auf einem beschränkten Intervall D Lipschitz-stetig ist.

a) *Jede konstante Funktion* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$ *ist Lipschitz-stetig:*

$$|f(x) - f(y)| = |c - c| = 0 \leq 1 \cdot |x - y| .$$

Außerdem ist die Identität $\mathrm{id}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Lipschitz-stetig:*

$$|\mathrm{id}(x) - \mathrm{id}(y)| = |x - y| \leq 1 \cdot |x - y| .$$

Eine nicht überall differenzierbare Lipschitz-stetige Funktion ist $|x|$.

Zwei Beispiele für nicht Lipschitz-stetige Funktionen:

1. *Die Funktion* $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ *ist stetig. Sie ist aber nicht Lipschitz-stetig: Zunächst sehen wir, dass gilt*

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y}{xy} - \frac{x}{xy}\right| = |y - x| \cdot \frac{1}{|xy|} = |x - y| \cdot \frac{1}{xy} .$$

Nun nehmen wir an, es gäbe ein $L > 0$, *so dass* $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$ *für alle* $x, y \in (0, \infty)$. *Das würde aber bedeuten, dass für alle* $x, y \in (0, \infty)$ *gilt*

$$\begin{aligned} |x - y| \cdot \frac{1}{xy} \leq L \cdot |x - y| \quad &\iff \quad \frac{1}{xy} \leq L \\ &\iff \quad \frac{1}{L \cdot y} \leq x. \quad (*) \end{aligned}$$

Da $\frac{1}{L \cdot y} > 0$, *können wir aber ein* $x' \in]0, \infty[$ *finden mit* $x' < \frac{1}{L \cdot y}$. *Dies ist ein Widerspruch zu* $(*)$.

2. *Wir setzen* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = x^2$. *Für alle* $L > 0$ *und* $x > L$ *sehen wir*

$$|f(x) - f(0)| = |x^2 - 0| = |x^2| > L|x| = L|x - 0| .$$

Das bedeutet, dass es kein $L > 0$ *gibt so dass* $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ *für alle* $x, y \in D$ *gilt. Also ist* f *nicht Lipschitz-stetig.*

Bemerkung:
Anschaulich gesehen ist eine stetige Funktion Lipschitz-stetig, wenn die Sekantensteigung beschränkt ist. Zur Erinnerung: Für zwei Elemente $(x, f(x)), (y, f(y))$ des Graphs von f (mit $x \neq y$) ist die Sekante die durch die beiden Punkte gehende Gerade. Offensichtlich hat diese Gerade die Steigung $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Damit sagt die Bedingung

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in D$$

gerade, dass, egal welche Punkte des Graphes wir nehmen, diese Steigung betragsmäßig immer kleiner oder gleich L ist.

b) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen ein $\delta > 0$ finden, so dass

$$|x - y| < \delta \ \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Da die Lipschitz-stetigkeit von f uns

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| < L \cdot \delta$$

gibt, setzen wir also einfach $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ und sind fertig.
Die Umkehrung gilt nicht:
Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist als eine auf einem kompakten Intervall definierte stetige Funktion gleichmäßig stetig. Nun nehmen wir an, f sei Lipschitz-stetig und leiten einen Widerspruch her: Wenn f Lipschitz-stetig wäre, so gäbe es eine positive reelle Zahl L mit

$$\begin{aligned} & |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \\ \iff \quad & |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L \cdot |x - y|\,. \end{aligned}$$

Wir setzen $y = 0$ (denn wenn man den Graphen betrachtet, dann wird die Sekantensteigung in der Nähe von 0 beliebig groß) und erhalten, dass für alle $x \in [0, 1]$ gelten müsste

$$\begin{aligned} & |\sqrt{x}| \leq L \cdot |x| \\ \iff \quad & \sqrt{x} \leq L \cdot x \\ \iff \quad & \sqrt{x} \leq L \cdot \sqrt{x^2} \\ \iff \quad & 1 \leq L \cdot \sqrt{x} \\ \iff \quad & \frac{1}{L} \leq \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Ein L, dass diese Bedingung erfüllt, existiert aber nicht. Also ist f nicht Lipschitz-stetig.

c) *Seien L_f und L_g die Lipschitz-Konstanten von f bzw. g. Dann gelten für alle $x, y \in D$*

$$|f(x) - f(y)| \leq L_f \cdot |x - y| \quad \text{und} \quad |g(x) - g(y)| \leq L_g \cdot |x - y|\,. \qquad (*)$$

Aus den Eigenschaften des Absolutbetrages folgt:

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| \\ &\overset{\text{Dreiecks-Ungl.}}{\leq} |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &\overset{(*)}{\leq} L_f \cdot |x-y| + L_g \cdot |x-y| \\ &= (L_f + L_g) \cdot |x-y|. \end{aligned}$$

Also ist $(L_f + L_g)$ eine Lipschitz-Konstante für $(f+g)$ und $(f+g)$ ist Lipschitz-stetig.

Wir haben bereits gesehen das $\mathrm{id}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist. Zudem haben wir ebenfalls herausgefunden, dass $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ nicht Lipschitz-stetig ist. Aber: $f = \mathrm{id} \cdot \mathrm{id}$.

d)
- *Sei $x_0 \in D$. Dann gilt für alle $x \in D$*

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| \qquad \textit{Dreiecksungleichung} \\ &\leq L(b-a) + |f(x_0)|\,. \end{aligned}$$

  Also ist f auf D beschränkt durch $C := |f(x_0)| + L(b-a)$.

- *Wegen obiger Aussage gibt es Konstanten A_f, A_g so dass für alle $x \in D$ gilt $|f(x)| \leq A_f$ und $|g(x)| \leq A_g$. Seien nun L_f und L_g die Lipschitz-Konstanten von f bzw. g. Dann gilt für alle $x, y \in D$*

$$\begin{aligned} |(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(y)| &= |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \\ &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &= |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \\ &\leq A_f \cdot |g(x) - g(y)| + A_g \cdot |f(x) - f(y)| \\ &\leq A_f \cdot L_g \cdot |x-y| + A_g \cdot L_f \cdot |x-y| \\ &= (A_f \cdot L_g + A_g \cdot L_f) \cdot |x-y|\,. \end{aligned}$$

  Also ist $f \cdot g$ Lipschitz-stetig.

e) *Wir zeigen mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass $x \mapsto x^k\colon D \to \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ Lipschitz-stetig ist: Für $k = 1$ ist diese Funktion gerade die Identität, deren Lipschitz-Stetigkeit wir schon gezeigt haben.*

Wenn nun $x \mapsto x^n \colon D \to \mathbb{R}$ *Lipschitz-stetig ist, so ist auch die Funktion* $x \mapsto x^{n+1} \colon D \to \mathbb{R}$ *als Produkt von* $x \mapsto x^n \colon D \to \mathbb{R}$ *und* $\mathrm{id} \colon D \to \mathbb{R}$ *Lipschitz-stetig.*

Da die konstanten Funktionen Lipschitz-stetig sind, ist also auch die Funktion $x \mapsto c \cdot x^n \colon D \to \mathbb{R}$ *Lipschitz-stetig. Weiterhin ist dann* $p \colon D \to \mathbb{R},\ p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ *ebenfalls Lipschitz-stetig.*