Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Dr. B. Debrabant
F. Riechwald
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

17.12.2008

Analysis 1 für M, LaG M, Tutorium 10

T 29 Gleichmäßige Stetigkeit

Sei $f : K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}$.

Beweise, dass f gleichmäßig stetig ist. Verwende dafür die Folgenkompaktheit der Menge K und nicht deren Überdeckungskompaktheit.

T 30 Lipschitz-Stetigkeit

Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ wird *Lipschitz-stetig* genannt, falls eine positive reelle Zahl L existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in D.$$

Die Zahl L heißt eine *Lipschitz-Konstante* von f.

a) Finde eine Lipschitz-stetige Funktion, die nicht differenzierbar ist. Gib außerdem eine stetige Funktion an, die nicht Lipschitz-stetig ist.

b) Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion. Zeige, dass f gleichmäßig stetig ist.

   Gilt die Umkehrung dieser Aussage?

c) Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetige Funktionen. Zeige, dass die Funktion

$$f + g\colon D \to \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

   ebenfalls Lipschitz-stetig ist.

   Finde Lipschitz-stetige Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $f \cdot g$ nicht Lipschitz-stetig ist.

d) Zeige, dass eine Lipschitz-stetige Funktion, die auf einem beschränkten Intervall definiert ist, beschränkt ist.

   Seien nun $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetige Funktionen auf einem beschränkten Intervall D. Zeige, dass die Funktion

$$f \cdot g\colon D \to \mathbb{R}, \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

   ebenfalls Lipschitz-stetig ist.

e) Zeige, dass jedes Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ auf einem beschränkten Intervall D Lipschitz-stetig ist.