Analysis 1 für M, LaG M, Tutorium 9, Lösungsvorschlag

T 27 Rand, Inneres und Abschluss einer Menge

Sei $A \subset \mathbb{R}$. Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt Randpunkt von A, wenn in jeder Umgebung von a sowohl ein Punkt von A als auch ein Punkt von $\mathbb{R}\backslash A$ liegen. Die Menge aller Randpunkte von A bezeichnen wir mit ∂A. Man zeige:

a) Die Menge $A\backslash\partial A$ ist offen.

b) Die Menge $A \cup \partial A$ ist abgeschlossen.

Weiterhin bezeichnet man $\mathring{A} := A\backslash\partial A$ als das Innere und $\overline{A} := A \cup \partial A$ als den Abschluss der Menge A.

c) Konstruiere eine offene Menge U, so dass $\mathring{\overline{U}} \neq U$ gilt.

d) Zeige, dass
$$\mathring{A} = \bigcup_{O \subset A,\, O\, offen} O$$
und
$$\overline{A} = \bigcap_{F \supset A,\, F\, abgeschlossen} F$$
gelten.

e) Zeige, dass $\mathring{A}$ gleich der Menge aller inneren Punkte von A ist und dass $\overline{A}$ gleich der Vereinigung von A mit der Menge der Häufungspunkte von A ist.

a) Sei $x \in A\backslash\partial A$. Dann ist x kein Randpunkt von A. Also gibt es eine Umgebung $U(x)$, in der entweder kein Punkt von A oder kein Punkt von A^c liegt. Da x selbst in A liegt, ist die zweite Alternative richtig, d. h., $U(x) \subset A$.

Bleibt zu zeigen, dass $U(x) \cap \partial A = \emptyset$.

Sei $y \in U(x)$. Da $U(x)$ offen ist, liegt eine Umgebung $V(y)$ ganz in $U(x)$, also in A. Dann kann y kein Randpunkt von A sein. Damit ist $U(x) \subset A\backslash\partial A$.

b) Folgt aus a) mit A^c statt A und mit Komplementärbildung, da $\partial A = \partial(A^c)$, siehe Übung 7, H3(i).

Möglich ist auch folgender Beweis:

Erinnerung: Eine Menge heißt abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

Sei x ein Häufungspunkt von $A \cup \partial A$, der nicht in A liegt. Wir zeigen, dass dann $x \in \partial A$ gelten muss:

Wäre $x \notin \partial A$, würde es eine (nichtleere) Umgebung $U(x)$ von x geben, so dass $U(x) \cap A = \emptyset$ oder $U(x) \cap A^c = \emptyset$. Letzteres kann nicht sein, da $x \in A^c$.

Also muss $U(x) \cap A = \emptyset$ gelten, weshalb x kein Häufungspunkt von A sein kann, da sonst jede Umgebung von x Punkte von A enthalten würde.

Also muss x als Häufungspunkt von $A \cup \partial A$ genaugenommen ein Häufungspunkt von ∂A sein.

Nach Übung 7, H3(ii) ist ∂A abgeschlossen und enthält somit alle seine Häufungspunkte (Widerspruch).

Also gilt $x \in \partial A$ und folglich ist $A \cup \partial A$ abgeschlossen.

c) *Wähle z. B. $U = (-1,0)\cup(0,1)$. Dann gelten $\bar{U} = [-1,1]$ und $\mathring{\bar{U}} = (-1,1) \neq U$.*

d) *Erste Behauptung:*

Die Teilmengenbeziehung „$\subset$“ folgt aus der Tatsache, dass $\mathring{A} = A \backslash \partial A$ selbst offen und Teilmenge von A ist.

„$\subset$“ erhält man, da jedes offene $O \subset A$ auch in $\mathring{A}$ liegt. Das folgt aber, da Punkte (innere) aus O niemals Randpunkte von A sein koennen, also $O \subset A \setminus \partial A$.

Zweite Behauptung:

Die zweite Ausage folgt aus der ersten mit Komplementärbildung und A^c statt A. (Beachte dabei, dass $\partial A = \partial A^c$.)

Alternativ kann man die zweite Behauptung auch wieder direkt beweisen:

Wir zeigen, dass $\partial A \subset F$ für alle abgeschlossenen Mengen $F \supset A$ gilt:

Sei $x \in \partial A$. Da jede noch so kleine Umgebung von x Punkte aus A enthält (da x ein Randpunkt von A ist), ist x ein Häufungspunkt von A. Also ist x auch ein Häufungspunkt von F, welcher, da F abgeschlossen ist, zu F gehört, $x \in F$.

Also gilt für jede abgeschlossene Menge $F \supset A$, dass $\overline{A} = A \cup \partial A \subset F$ ist. Da $A \cup \partial A$ selbst abgeschlossen ist, haben wir

$$\overline{A} = \cap\{F | F \supset A, F abgeschlossen\}.$$

e) *Da $A \backslash \partial A$ offen ist, enthält $\mathring{A}$ nur innere Punkte (von A), also*

$$\mathring{A} \subset \{a | a \text{ innerer Punkt von } A\}.$$

Ferner kann ein innerer Punkt von A kein Randpunkt von A sein, da es eine Umgebung gibt, die ganz in A enthalten ist. Also haben wir auch

$$\mathring{A} \supset \{a | a \text{ innerer Punkt von } A\}.$$

Zweite Behauptung:

Da $\overline{A}$ abgeschlossen ist, enthält es mit A auch alle Häufungspunkte von A,

$$\overline{A} \supset \{a | a \in A \text{ oder } a \text{ Häufungspunkt von } A\}.$$

Jeder Punkt aus $\overline{A}$ liegt in A oder ist Häufungspunkt von A. Liegt ein Punkt aus $\overline{A}$ nicht in A, dann auf jeden Fall in ∂A und ist somit auch ein Häufungspunkt von A, d. h.

$$\overline{A} \subset \{a | a \in A \text{ oder } a \text{ Häufungspunkt von } A\}.$$

T 28 Struktur offener Teilmengen von $\mathbb{R}$

Sei M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wir wollen zeigen, dass M eine abzählbare disjunkte Vereinigung von offenen Intervallen ist. (Eine *disjunkte* Vereinigung $\bigcup_{i\in I} X_i$ ist eine Vereinigung bei der je zwei Mengen X_i und X_k mit $i, k \in I$ leeren Schnitt haben.)

Dazu gehen wir in folgenden Schritten vor:

1. Sei $x \in M$. Mit I_x bezeichnen wir die Vereinigung aller offenen Intervalle, die x enthalten, und die in M enthalten sind. Zeige, dass I_x ein offenes Intervall ist.
2. Seien $x, y \in M$. Zeige, daß aus $y \in I_x$ schon $I_x = I_y$ folgt.
3. Zeige nun die Behauptung.

1. *Sei $x \in M$. Wir haben zu zeigen, daß I_x ein offenes Intervall ist. Wir müssen also Intervallgrenzen angeben. Dazu setzen wir*
$$a_x := \inf\{a : x \in (a, b) \subseteq M\} \quad \textit{und} \quad b_x := \sup\{b : x \in (a, b) \subseteq M\}.$$
Nun ist die Gleichheit
$$I_x = (a_x, b_x)$$
von Mengen zu zeigen.

   Sei also $y \in I_x$. Dann ist y Element eines Intervalls $(a, b) \subseteq M$. Damit gilt $a_x \leq a < y < b \leq b_x$. Somit ist y in (a_x, b_x) enthalten.

   Nun sei $y \in (a_x, b_x)$. Wir behandeln den Fall $y \leq x$. Der andere Fall geht analog. Aufgrund der Definition von a_x gibt es ein Intervall (a, b) mit $a \leq \frac{y+a_x}{2}$ und mit $x < b$. Dieses Intervall enthält x und y wegen
$$a \leq \frac{y + a_x}{2} < y \leq x < b.$$
Somit ist y ein Element von I_x.
2. *Sei $y \in I_x$. Dann ist I_x ein Intervall, welches y enthält, also ist es nach der Definition von I_y eine Teilmenge von I_y.*

   Die Beziehung $y \in I_x$ bedeutet, dass es ein Intervall in M gibt welches x und y enthält. Also folgt $x \in I_y$. Mit dem Argument von oben schließen wir $I_y \subseteq I_x$.

   Insgesamt haben wir damit die Gleichheit $I_x = I_y$ gezeigt.
3. *Aus dem eben gezeigten folgt, dass für $x, y \in M$ entweder der Schnitt $I_x \cap I_y$ leer ist, oder $I_x = I_y$ gilt. Somit lässt sich M als disjunkte Vereinigung von offenen Intervallen darstellen. Da jedes Intervall eine rationale Zahl enthält und die Menge der Rationalzahlen abzählbar ist, ist diese Vereinigung abzählbar.*