Analysis 1 für M, LaG M, Tutorium 8, Lösungsvorschlag

T 23 Alternierende harmonische Reihe

Sei $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ eine unendliche Reihe. Sei p_k der k-te positive Summand der Reihe, und n_k der k-te negative Summand.

a) Bestimme p_k, n_k für die alternierende harmonische Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j}$.

b) Zeige, dass $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = \infty$ und $\sum_{j=1}^{\infty} n_j = -\infty$ gelten.

a) *Es gilt* $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots + \cdots$. *Daraus ergibt sich* $p_k = \frac{1}{2k-1}$ *und* $n_k = \frac{1}{2k}$.

b) *Man kann die Divergenz der beiden Reihen auf die Divergenz der harmonischen Reihe zurückführen:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Alternativ kann man den Beweis auch direkt durchführen. Dazu betrachtet man $\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{2k-1}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{2k-1} &= \frac{1}{2\cdot 2^i+1} + \frac{1}{2\cdot 2^i+3} + \cdots + \frac{1}{2\cdot 2^{i+1}-1} \\
&> \frac{1}{2^{i+2}} + \frac{1}{2^{i+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{i+2}} \\
&= 2^i \cdot \frac{1}{2^{i+2}} \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Folge der Partialsummen unbeschränkt ist (siehe auch Forster, Beispiel 7.1) und damit die Reihe divergiert. Auf die gleiche Weise kann man die Folge $t_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{2k}$ *untersuchen und zeigen, dass die Folge der Partialsummen von* $\sum_{j=1}^{\infty} n_j$ *gegen* $-\infty$ *divergiert.*

T 24 Absolute Konvergenz

Beweise, dass $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ genau dann absolut konvergiert, wenn sowohl $\sum\limits_{j=1}^{\infty} p_j$ als auch $\sum\limits_{j=1}^{\infty} n_j$ konvergieren.

$\Rightarrow$: *Wenn* $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ *konvergiert, konvergiert auch die Reihe* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$. *Zudem konvergieren sowohl* $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2}|a_j| = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ *als auch* $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2}a_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} a_j$. *Dann konvergieren*

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_j = \frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{\infty} a_j + \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|)$$

und

$$\sum_{j=1}^{\infty} n_j = \frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{\infty} a_j - \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|)$$

als Summe von konvergenten Reihen.

$\Leftarrow$: *Wenn* $\sum_{j=1}^{\infty} p_j$ *und* $\sum_{j=1}^{\infty} n_j$ *konvergieren, so konvergieren auch die Reihen* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^+$ *und* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^-$ *mit*

$$a_j^+ := \begin{cases} a_j & \text{if } a_j > 0 \\ 0 & \text{if } a_j \leq 0 \end{cases}$$

$$a_j^- := \begin{cases} a_j & \text{if } a_j < 0 \\ 0 & \text{if } a_j \geq 0 \end{cases}$$

mit $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^+ = \sum_{j=1}^{\infty} p_j$ *und* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^- = \sum_{j=1}^{\infty} n_j$. *Dies wiederum impliziert die Konvergenz von*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| = \sum_{j=1}^{\infty} [a_j^+ - a_j^-] = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^+ - \sum_{j=1}^{\infty} a_j^-,$$

also konvergiert $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *absolut.*

T 25 Umordnung von Reihen

a) Überlege Dir für die alternierende harmonische Reihe, wie man diese umordnen muss, damit sie gegen ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

b) Zeige nun für eine beliebige Reihe:

Wenn $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert aber nicht absolut konvergiert, dann existiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_{\sigma(j)}$ von $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ mit $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_{\sigma(j)} = x$.

a) *Wir geben keine explizite Beschreibung der Umordnung an.*

Die umgeordnete alternierende harmonische Reihe welche gegen ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ *konvergiert, erhalten wir wie folgt:*

Wir gruppieren Sequenzen von p_k's und n_k's hintereinander, und zwar so, dass eine Sequenz abbricht, wenn die Partialsumme höher bzw. niedriger als x ist. Für $x = 1$ hat man beispielsweise

$$1 \;=\; 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{8} \pm \dots$$

b) *Wir zeigen zunächst, dass für eine konvergente aber nicht absolut konvergente Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ die zughörigen Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} n_k$ divergieren: Da $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ nicht absolut konvergiert, folgt mit Aufgabe T24, dass mindestens eine der zwei Reihen nicht konvergiert. Um genau zu sein dürfen sogar beide nicht konvergieren, denn wenn eine beschränkte Partialsummen hätte, und die andere unbeschränkte, dann hätte die Ursprungsreihe ebenfalls unbeschränkte Partialsummen. Dies widerspricht der Annahme, dass die Ursprungsreihe konvergiert.*

Sei nun also $x \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass $x > 0$ gilt. Durch eine kleine Modifikation des folgenden Beweises erhält man den Fall $x \leq 0$. Da $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ nicht konvergent ist, ist die Folge der Partialsummen s_n unbeschränkt. Deshalb existiert eine Zahl N so daß $s_N = \sum_{k=1}^{N} p_k > x$. Wir wählen N_1 als die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft. Es gilt also

$$\sum_{k=1}^{N_1-1} p_k \;\leq\; x \tag{1}$$

$$\text{aber} \sum_{k=1}^{N_1} p_k \;>\; x \tag{2}$$

Wir setzen $S_1 := \sum_{k=1}^{N_1} p_k$. Dann folgt aus der Gleichung (1) daß $S_1 - x \leq S_1 - \sum_{k=1}^{N_1-1} p_k = p_{N_1}$. Zu der Summe S_1 addieren wir nun gerade genug Terme, um eine neue Summe T_1 zu erhalten, die gerade kleiner als x ist. Mit anderen Worten: wir wählen die kleinste natürliche Zahl M_1, die $T_1 := S_1 + \sum_{k=1}^{M_1} n_k < x$ erfüllt. Wie zuvor gilt $x - T_1 \leq -n_{M_1}$. Wir setzen dieses Verfahren unendlich fort und erhalten jedesmal Summen, die abwechselnd größer und kleiner als x sind, wobei wir jedesmal das kleinste mögliche N_k bzw. M_k wählen. Die Summe der Folge

$$p_1, \dots, p_{N_1}, n_1, \dots, n_{M_1}, p_{N_1+1}, \dots, p_{N_2}, \dots$$

ist eine Umordnung von $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$. Die Partialsummen dieser Umordnung wachsen bis S_1, dann fallen sie bis T_1, dann wachsen sie bis S_2, dann fallen sie wieder bis T_2, usw. Um diesen Beweis zu vollenden bemerken wir nun, dass $|S_k - x|$ und $|T_k - x|$ kleiner oder gleich p_{N_k} bzw. $-n_{M_k}$ sind. Diese Terme sind Summanden der Ursprungsfolge $(a_n)_n$, und da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, müssen die $|a_n|$ gegen 0 gehen.

Der Fall $x \leq 0$ wird analog untersucht (mit dem Unterschied, dass man zuerst die negativen Terme betrachtet, dann die positiven, usw).

T 26 Doppelreihen

Untersuche, ob die nachfolgenden Doppelreihen $\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ die Voraussetzungen des Großen Umordnungssatzes erfüllen, also ob es eine Schranke M gibt, so dass

$$\sum_{k,l=1}^{n} |a_{kl}| \ \leq \ M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

a) $\displaystyle\sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{1}{(k \cdot l)^2}$ b) $\displaystyle\sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{1}{(k+l)^2}$

a) *Diese Doppelreihe erfüllt die Voraussetzungen, da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k,l=1}^{n} \frac{1}{(k \cdot l)^2} \ = \ \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{k^2 \cdot l^2} \ = \ \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)^2 \ \leq \ \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^2 \ =: \ M \ < \ \infty.$$

b) *Die Voraussetzung ist nicht erfüllt, da*

$$\sum_{k,l=1}^{n} \frac{1}{(k+l)^2} \ \overset{i=k+l}{\geq} \ \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2} \cdot (i-1) \ = \ \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite wird beliebig groß, für wachsendes n, da die harmonische Reihe divergiert, $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ hingegen konvergiert. Also kann es keine obere Schranke M geben, so dass

$$\sum_{k,l=1}^{n} \frac{1}{(k+l)^2} \leq M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.