Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Dr. B. Debrabant
F. Riechwald
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

03.12.2008

Analysis 1 für M, LaG M, Tutorium 8

T 23 Alternierende harmonische Reihe

Sei $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ eine unendliche Reihe. Sei p_k der k-te positive Summand der Reihe, und n_k der k-te negative Summand.

a) Bestimme p_k, n_k für die alternierende harmonische Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j}$.

b) Zeige, dass $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = \infty$ und $\sum_{j=1}^{\infty} n_j = -\infty$ gelten.

T 24 Absolute Konvergenz

Beweise, dass $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ genau dann absolut konvergiert, wenn sowohl $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} p_j$ als auch $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} n_j$ konvergieren.

T 25 Umordnung von Reihen

a) Überlege Dir für die alternierende harmonische Reihe, wie man diese umordnen muss, damit sie gegen ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

b) Zeige nun für eine beliebige Reihe:

Wenn $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert aber nicht absolut konvergiert, dann existiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_{\sigma(j)}$ von $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ mit $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_{\sigma(j)} = x$.

T 26 Doppelreihen

Untersuche, ob die nachfolgenden Doppelreihen $\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ die Voraussetzungen des Großen Umordnungssatzes erfüllen, also ob es eine Schranke M gibt, so dass

$$\sum_{k,l=1}^{n} |a_{kl}| \leq M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

a) $\displaystyle\sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{1}{(k \cdot l)^2}$ b) $\displaystyle\sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{1}{(k + l)^2}$