# Analysis 1 für M, LaG M, Tutorium 7, Lösungsvorschlag

## T 21 Dezimalzahlen und $p$-adische Entwicklungen

Sei $p \geq 2$ eine natürliche Zahl. Die ganzen Zahlen $a$ mit $0 \leq a < p$ nennt man *$p$-adische Ziffern*. Eine Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k p^{-k}$$

mit $p$-adischen Ziffern $a_k$ heißt $p$-adische Entwicklung, wenn nicht fast alle Ziffern gleich $p-1$ sind.

a) Für $p = 2$ berechne eine $p$-adische Entwicklung für $\frac{3}{4}$. Berechne die ersten 4 Ziffern einer Entwicklung von $\frac{1}{3}$.

b) Für $p = 10$ berechne eine $p$-adische Darstellung von $\frac{3}{4}$. Ist

$$0.4\overline{9} = \frac{4}{10} + \sum_{k=2}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k}$$

eine dekadische (d.h. 10-adische) Entwicklung? Berechne den Grenzwert dieser Reihe und bestimme eine dekadische Entwicklung davon.

c) Überlege, warum eine gegebene $p$-adische Darstellung immer als Reihe konvergiert.

d) Zeige, dass es für jedes $x \in (0, 1)$ genau eine $p$-adische Entwicklung gibt.

*a)*

$$\frac{3}{4} = \underbrace{1}_{=a_1} \cdot \frac{1}{2} + \underbrace{1}_{=a_2} \cdot \frac{1}{4}.$$

$$\frac{1}{3} = \underbrace{0}_{=a_1} \cdot \frac{1}{2} + \underbrace{1}_{=a_2} \cdot \frac{1}{4} + \underbrace{0}_{=a_3} \cdot \frac{1}{8} + \underbrace{1}_{=a_4} \cdot \frac{1}{16} + \cdots.$$

*b) Die Dezimalentwicklung von $\frac{3}{4}$ ist $0.75$, das heißt $a_1 = 7$, $a_2 = 5$ und $a_i = 0$ für $i > 2$.*

*Die gegebene Reihe $0.4\overline{9}$ ist nach unserer Definition keine dekadische Entwicklung, da nur endlich oft eine andere Ziffer als 9 vorkommt. Mithilfe der geometrischen Reihe ergibt sich als Grenzwert der Reihe $x = \frac{1}{2}$. Eine dekadische Entwicklung von $x$ ist*

$$x = \underbrace{5}_{=a_1} \cdot \frac{1}{10}.$$

*c) Die geometrische Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^{-k}$$

*ist eine Majorante.*

*d) Vgl. Skript S. 85 f.*

**T 22 Wurzel- und Quotientenkriterium**

Sei eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gegeben, wobei $a_n \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

Beweise: Wenn $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q$ mit $q < 1$, dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$.

Beweise, dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt.

*Sei zunächst $q > 0$.*

*Da $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q < 1$, gibt es für $\varepsilon > 0$ mit $0 \leq q - \varepsilon < q + \varepsilon < 1$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$ so, dass*

$$\left| \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| - q \right| \leq \varepsilon$$

*für alle $k \geq N_1$ gilt. Wir setzen $\beta_o := \varepsilon + q < 1$ und $\beta_u := q - \varepsilon \geq 0$.*

*Für $k \geq N_1$ haben wir $\beta_u |a_k| \leq |a_{k+1}| \leq \beta_o |a_k|$, außerdem*

$$\begin{aligned} \beta_u^{k-N_1} |a_{N_1}| \leq |a_k| &\leq \beta_o^{k-N_1} |a_{N_1}| \\ \text{bzw. } \beta_u^{1-\frac{N_1}{k}} |a_{N_1}|^{\frac{1}{k}} - q \leq |a_k|^{\frac{1}{k}} - q &\leq \beta_o^{1-\frac{N_1}{k}} |a_{N_1}|^{\frac{1}{k}} - q. \end{aligned}$$

*Also gilt*

$$\left| |a_k|^{\frac{1}{k}} - q \right| \leq \max \left\{ \left| \beta_o^{1-\frac{N_1}{k}} |a_{N_1}|^{\frac{1}{k}} - q \right|, \left| \beta_u^{1-\frac{N_1}{k}} |a_{N_1}|^{\frac{1}{k}} - q \right| \right\} \tag{1}$$

*Die Folgen $\beta_{\cdot}^{1-\frac{N_1}{k}} |a_{N_1}|^{\frac{1}{k}} - q$ konvergieren gegen $\beta_{\cdot} - q$. Das Maximum auf der rechten Seite von (1) konvergiert daher gegen $\max\{|\beta_o - q|, |\beta_u - q|\} = \varepsilon$ (vgl. Aufgabe T18).*

*Insgesamt haben wir also*

$$\left| \lim_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} - q \right| = \lim_{k\to\infty} \left| |a_k|^{\frac{1}{k}} - q \right| \leq \varepsilon.$$

*Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, muss $\lim_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = q$ gelten.*

*Für den Fall $q = 0$ setzt man $\beta_u := 0$.*

*Das die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt, erkennt man an folgendem Gegenbeispiel:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}}$$

*Wurzelkriterium: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{2}}{2}, & n \text{ gerade}, \\ \frac{1}{2}, & n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

*Daher ist* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}$, *und die Reihe ist konvergent nach Wurzelkriterium.*
*Quotientenkriterium: Die Folge* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *ist nicht konvergent, da*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & n \text{ gerade}, \\ 1, & n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

*was bedeutet, dass zwei Teilfolgen (gerade und ungerade* $n$*) mit verschiedenen Grenzwerten existieren.*