Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Dr. B. Debrabant
F. Riechwald
R. Schulz

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

26.11.2008

Analysis 1 für M, LaG M, Tutorium 7

T 21 Dezimalzahlen und p-adische Entwicklungen

Sei $p \geq 2$ eine natürliche Zahl. Die ganzen Zahlen a mit $0 \leq a < p$ nennt man *p-adische Ziffern*. Eine Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k p^{-k}$$

mit p-adischen Ziffern a_k heißt p-adische Entwicklung, wenn $a_k \neq p-1$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ gilt.

a) Für $p = 2$ berechne eine p-adische Entwicklung für $\frac{3}{4}$. Berechne die ersten 3 Ziffern einer Entwicklung von $\frac{1}{3}$.

b) Für $p = 10$ berechne eine p-adische Darstellung von $\frac{3}{4}$. Ist

$$0.4\overline{9} = \frac{4}{10} + \sum_{k=2}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k}$$

eine dekadische (d.h. 10-adische) Entwicklung? Berechne den Grenzwert dieser Reihe und bestimme eine dekadische Entwicklung davon.

c) Überlege, warum eine gegebene p-adische Darstellung immer als Reihe konvergiert.

d) Zeige, dass es für jedes $x \in (0, 1)$ genau eine p-adische Entwicklung gibt.

T 22 Wurzel- und Quotientenkriterium

Sei eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gegeben, wobei $a_n \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

Beweise: Wenn $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q$ mit $q < 1$, dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$.

Beweise, dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt.