Analysis 1 für M, LaG M, Tutorium 6, Lösungsvorschlag

T 17 Ein Kriterium für Nullfolgen

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \text{ mit } |a| < 1$$

gilt. Zeige $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Sei $\varepsilon = \frac{1}{2}(1-|a|)$. Es gibt ein N, so dass $|\frac{a_{n+1}}{a_n} - a| \leq \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt. Für $n > N$ folgt

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq \varepsilon + |a| =: q < 1.$$

Durch vollständige Induktion zeigt man $|a_n| \leq |a_N| \cdot q^{n-N} = q^{-N}|a_N|q^n$ für $n > N$.

Da $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ gegen 0 konvergiert, gilt dies auch für die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

T 18 Grenzwerte von Zahlenfolgen

Zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{a, b\}$$

gilt, falls $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Es reicht nur den Fall $a \leq b$ zu betrachten.
Sei zunächst $a < b$. Sei $\epsilon > 0$ gegeben, so dass $a+\epsilon < b-\epsilon$ gilt. Gemäß der Definition des Grenzwerts einer Zahlenfolge gibt es ein $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$a_n < a + \epsilon < b - \epsilon < b_n, \qquad n \geq N(\epsilon).$$

Da $\max\{a_n, b_n\} = b_n$ für $n \geq N(\epsilon)$, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \lim_{n\to\infty} b_n = b = \max\{a, b\}.$$

Sei $a = b$. Dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein n_0, so dass für alle $n > n_0$ die Ungleichungen $|a_n - a| < \epsilon$ und $|b_n - a| < \epsilon$ gelten, d.h.

$$|\max\{a_n, b_n\} - a| < \epsilon.$$

Dies beweist die Behauptung.

T 19 Intervallschachtelungsprinzip impliziert Vollständigkeit

Wir wollen in mehreren Schritten zeigen: Aus dem Intervallschachtelungsprinzip (Satz 4.10) folgt, dass jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein reelle Cauchy-Folge.

1. Zeige, dass es eine Folge
$$n_0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots$$
natürlicher Zahlen gibt mit
$$|a_n - a_m| < 2^{-(k+1)} \quad \text{für alle } n, m \geq n_k.$$
2. Wir definieren
$$I_k := \left[a_{n_k} - \frac{1}{2^k}, a_{n_k} + \frac{1}{2^k}\right].$$
Zeige, dass $I_k \supseteq I_{k+1}$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.
3. Wie bekommen wir nun einen Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

1. Dies folgt daraus, dass a_n eine Cauchy-Folge ist.

2. Sei also $k \in \mathbb{N}_0$ gegeben und sei x ein Element von I_{k+1}. Dann gilt aufgrund der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |x - a_{n_k}| &= |x - a_{n_{k+1}} + a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| \\ &\leq \underbrace{|x - a_{n_{k+1}}|}_{\leq 2^{-(k+1)},\text{ da } x\in I_{k+1}} + \underbrace{|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}|}_{<2^{-(k+1)} \text{ aufgrund der Definition von } n_k} \\ &< 2^{-(k+1)} + 2^{-(k+1)} = 2^{-k}. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $x \in I_k$ gilt.

3. Da die Folge $l_k = a_{nk} + \frac{1}{2^k} - a_{nk} + \frac{1}{2^k} = 2^{-k+1}$ der Intervalllängen eine Nullfolge ist, gibt es nach dem Intervallschachtelungs-Prinzip ein einziges

$$a \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} I_k.$$

Wir zeigen, dass a Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist:
Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $2^{-N+1} < \varepsilon$. Für $n \geq n_N$ gilt nun

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |a_n - a_{n_N} + a_{n_N} - a| \\ &\leq \underbrace{|a_n - a_{n_N}|}_{<2^{-(N+1)} \text{ nach der Definition von } n_N} + \underbrace{|a_{n_N} - a|}_{\leq 2^{-N} \text{ da } a\in I_N} \\ &< 2^{-(N+1)} + 2^{-N} = (\frac{1}{2} + 1)2^{-N} \leq 2 \cdot 2^{-N} = 2^{-N+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

T 20 Zusatzaufgabe

Zeige, dass
$$\lim_{n\to\infty} \left(2\sqrt[n]{x} - 1\right)^n = x^2$$

für $x \geq 1$ gilt.

Hinweis: Leite mittels der Bernoullischen Ungleichung her, dass

$$\left(2\sqrt[n]{x}-1\right)^n > x^2\left(1-\frac{x^2}{n\sqrt[n]{x^2}}\right).$$

Die Behauptung ist offensichtlich für $x = 1$. Sei nun $x > 1$. Wir haben

$$0 < \left(\sqrt[n]{x}-1\right)^2 = \sqrt[n]{x^2} - 2\sqrt[n]{x} + 1$$

und somit

$$\left(2\sqrt[n]{x}-1\right)^n < (\sqrt[n]{x^2})^n = x^2. \tag{1}$$

Andererseits gilt

$$\left(2\sqrt[n]{x}-1\right)^n = x^2\left(\frac{2}{\sqrt[n]{x}} - \frac{1}{\sqrt[n]{x^2}}\right)^n = x^2\left(1+\left(\frac{2}{\sqrt[n]{x}} - \frac{1}{\sqrt[n]{x^2}} - 1\right)\right)^n. \tag{2}$$

Die Bernoullische Ungleichung impliziert

$$\left(2\sqrt[n]{x}-1\right)^n \geq x^2\left(1+n\left(\frac{2}{\sqrt[n]{x}} - \frac{1}{\sqrt[n]{x^2}} - 1\right)\right) = x^2\left(1-n\frac{(\sqrt[n]{x}-1)^2}{\sqrt[n]{x^2}}\right).$$

Die Bernoullische Ungleichung liefert auch die Ungleichung

$$x = (\sqrt[n]{x}-1+1)^n \geq 1 + n(\sqrt[n]{x}-1) > n(\sqrt[n]{x}-1).$$

Deswegen gilt

$$\left(\sqrt[n]{x}-1\right)^2 < \frac{x^2}{n^2}.$$

Aus (2) erhalten wir

$$\left(2\sqrt[n]{x}-1\right)^n > x^2\left(1-\frac{x^2}{n\sqrt[n]{x^2}}\right). \tag{3}$$

Gemäß dem Einschliessungskriterium folgt es aus (1) und (3), dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(2\sqrt[n]{x}-1\right)^n = x^2$$

gilt.