Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Dr. B. Debrabant
F. Riechwald
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

19.11.2008

Analysis 1 für M, LaG M, Tutorium 6

T 17 Ein Kriterium für Nullfolgen

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \text{ mit } |a| < 1$$

gilt. Zeige $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

T 18 Grenzwerte von Zahlenfolgen

Zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{a, b\}$$

gilt, falls $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

T 19 Intervallschachtelungsprinzip impliziert Vollständigkeit

Wir wollen in mehreren Schritten zeigen: Aus dem Intervallschachtelungsprinzip (Satz 4.10) folgt, dass jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein reelle Cauchy-Folge.

1. Zeige, dass es eine Folge
$$n_0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots$$
natürlicher Zahlen gibt mit
$$|a_n - a_m| < 2^{-(k+1)} \quad \text{für alle } n, m \geq n_k.$$
2. Wir definieren
$$I_k := \left[a_{n_k} - \frac{1}{2^k}, a_{n_k} + \frac{1}{2^k}\right].$$
Zeige, dass $I_k \supseteq I_{k+1}$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.
3. Wie bekommen wir nun einen Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

T 20 Zusatzaufgabe

Zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(2\sqrt[n]{x} - 1\right)^n = x^2$$

für $x \geq 1$ gilt.

Hinweis: Leite mittels der Bernoullischen Ungleichung her, dass

$$\left(2\sqrt[n]{x} - 1\right)^n > x^2\left(1 - \frac{x^2}{n\sqrt[n]{x^2}}\right).$$