Analysis 1 für M, LaG M, Tutorium 5, Lösungsvorschlag

T 14 Mächtigkeit

Zeige, dass die Menge der Nullstellen von allen Gleichungen der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \qquad n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{Z},\ i = 0, \ldots, n,$$

abzählbar ist.

Für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ ist die Gleichung durch Zahlen $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ eindeutig bestimmt. Da $\mathbb{Z}$ abzählbar ist, gibt es abzählbar viele Möglichkeiten jedes der a_i auszuwählen. Auch $\mathbb{Z}^{n+1}$ ist als endliches direktes Produkt abzählbarer Mengen wieder abzählbar. Es gibt also abzählbar viele Gleichungen vom Grad n.

Jede Gleichung n-ten Grades hat höchstens n Nullstellen. Die Menge A_n der Nullstellen von Gleichungen n-ten Grades ist daher eine abzählbare Vereinigung von endlichen Mengen. Diese ist also wiederum abzählbar.

Ferner ist auch $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ eine abzählbare Menge, d. h., die Menge aller Nullstellen von Gleichungen der Form $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, $n \in \mathbb{N}$ beliebig, $a_i \in \mathbb{Z}$, ist abzählbar.

T 15 Mächtigkeit

Zeige, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A (A kann auch unendlich sein) immer eine größere Mächtigkeit als die Menge A hat.

Die Potenzmenge enthält alle einelementigen Teilmengen von A. Daher kann die Mächtigkeit der Potenzmenge nicht kleiner als die Mächtigkeit von A sein. Wir zeigen jetzt, dass es keine bijektive Funktion $f : A \to \mathcal{P}(A)$ gibt.

Indirekter Beweis: Angenommen gibt es eine bijektive Funktion $f : A \to \mathcal{P}(A)$. Wir betrachten jetzt ein element $x \in A$. Sei $X = f(x)$, $X \in \mathcal{P}(A)$. Wir sagen, dass ein Element $x \in A$ 'gut' ist, falls $x \in f(x) = X$, und $x \in A$ 'schlecht' ist, wenn $x \notin f(x) = X$ ist. Alle Elemente aus A sind entweder 'gut' oder 'schlecht'. Wir betrachten die Menge Y aller 'schlechten' Elemente. Da f bijektiv ist, gibt es ein eindeutiges Element $y \in A$, so dass $f(y) = Y$ ist.

Angenommen y ist 'schlecht'. Dann ist $y \in Y$, da Y aus allen 'schlechten' Elementen besteht. Aber ein Element y ist genau dann 'schlecht', wenn $y \notin f(y) = Y$ ist. Widerspruch. Das Element y kann nicht 'schlecht' sein.

Angenommen y ist 'gut'. Dann ist $y \in f(y) = Y$. Aber Y besteht nur aus 'schlechten' Elementen. Widerspruch. Das Element y kann nicht 'gut' sein.

Daraus folgt, dass es keine bijektive Abbildung zwischen A und $\mathcal{P}(A)$ existiert.

T 16 Quadratwurzeln

Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Wir wollen beweisen, dass $\sqrt{a}$ durch die Folge

$$x_0 = a, \;\; x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

approximiert werden kann.

a1) Zeige $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a2) Zeige $x_n^2 \geq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Zeige zunächst $s \cdot t \leq \frac{(s+t)^2}{4}$ für $s, t \in \mathbb{R}$.

a3) Beweise, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, und folgere daraus

$$x_1^2 \geq x_2^2 \geq \cdots \geq x_n^2 \geq x_{n+1}^2 \geq \cdots \geq a.$$

b) Zeige, dass die Folge $\left(\frac{a}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist und $\left(\frac{a}{x_n}\right)^2 \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

c) Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\frac{a}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen $\sqrt{a}$.
Hinweis: Betrachte die Länge $d_n := \left|x_n - \frac{a}{x_n}\right|$ des n-ten „Fehlerintervalls“ $\left[\frac{a}{x_n}, x_n\right]$ und zeige induktiv $d_n \leq \frac{|a-1|}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

a1) Durch vollständige Induktion zeigen wir dass $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$:
INDUKTIONSVORAUSSETZUNG: $x_0 = a > 0$.
INDUKTIONSANNAHME: *Wir nehmen an, dass $x_n > 0$ für alle $n \leq n_0$.*
INDUKTIONSSCHRITT: *von n auf $n+1$:*
$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$. *Da $a > 0$ und $x_n > 0$ erhalten wir $\frac{a}{x_n} > 0$. Deshalb folgt* $0 < \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) = x_{n+1}$.
Da $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wird nicht durch 0 geteilt und die Folge ist sinnvoll definiert.

a2) Zunächst beweisen wir den Hinweis:
Mit $(s-t)^2 = s^2 - 2st + t^2 \geq 0$ gilt auch $s^2 + t^2 \geq 2st$. Wenn wir nun auf beiden Seiten der Gleichung $2st$ addieren, so ergibt sich $s^2 + 2st + t^2 \geq 4st$ bzw. $\frac{(s+t)^2}{4} \geq st$.
Nun beweisen wir dass $x_n^2 \geq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wir erhalten

$$x_n^2 = \frac{1}{4}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 \overset{\text{Hinweis}}{\geq} x_{n-1} \cdot \frac{a}{x_{n-1}} = a.$$

a3) *Wir zeigen $x_{n+1} \leq x_n$, d.h. $x_{n+1} - x_n \leq 0$:*

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big) - x_n \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{a}{x_n} - x_n\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{a - x_n^2}{x_n}\Big). \end{aligned}$$

Da $x_n > 0$ (wegen a)) und $x_n^2 \geq a$ für $n \geq 1$ (wegen b)) erhalten wir $\frac{1}{2}\Big(\frac{a-x_n^2}{x_n}\Big) \leq 0$. Also gilt $x_{n+1} - x_n \leq 0$ für alle $n \geq 1$.
Für die zweite Ungleichungskette benutzen wir $x_{n+1} - x_n \leq 0$. Da gilt $x_{n+1}, x_n > 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & (x_{n+1} + x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & x_{n+1}^2 - x_n^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & x_{n+1}^2 \leq x_n^2. \end{aligned}$$

Dies zusammen mit a1) beweist die zweite Kette von Ungleichungen

b) *Zunächst bemerken wir, dass $\frac{a}{x_n}$ wegen a1) tatsächlich definiert ist. Wegen a2) gilt $x_n^2 \geq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies impliziert $\frac{a}{x_n^2} \leq 1$ und Multiplizieren mit a (das größer 0 ist) auf beiden Seiten der Ungleichung ergibt $\frac{a^2}{x_n^2} \leq a$.*
Nun zeigen wir $\frac{a}{x_n} \leq \frac{a}{x_{n+1}}$:

$$\begin{aligned} \frac{a}{x_n} \leq \frac{a}{x_{n+1}} \quad &\Leftrightarrow \quad a x_{n+1} \leq a x_n \\ &\overset{a>0}{\Leftrightarrow} \quad x_{n+1} \leq x_n \end{aligned}$$

was wegen a3) richtig ist. Daher gilt $\frac{a}{x_n} \leq \frac{a}{x_{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) *Wir nennen zwei mögliche Wege, den Hinweis zu beweisen, einen eher graphischen und einen rechnerischen. Zunächst den anschaulichen:*
Induktionsanfang $n = 1$:

$$\begin{aligned} |x_1 - \frac{a}{x_1}| &= |\frac{(a+1)}{2} - \frac{2a}{(a+1)}| = |\frac{(a+1)^2}{2(a+1)} - \frac{4a}{2(a+1)}| = |\frac{(a+1)^2 - 4a}{2(a+1)}| \\ &= |\frac{(a-1)^2}{2(a+1)}| = \frac{|a-1|}{2}\frac{|a-1|}{|a+1|}. \end{aligned}$$

Da $|a-1| \overset{a>0}{<} |a+1|$ folgt $\frac{|a-1|}{2}\frac{|a-1|}{|a+1|} \leq \frac{|a-1|}{2^1}$.
Induktionsschritt: Wir bemerken, dass wegen $\frac{a}{x_n} \leq \frac{a}{x_{n+1}}$ und $x_{n+1} \leq x_n$ das Intervall $[\frac{a}{x_{n+1}}, x_{n+1}] \subset [\frac{a}{x_n}, x_n]$ ist. Zudem gilt $x_{n+1} - \frac{a}{x_{n+1}} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{a}{x_n}\big) - \frac{a}{x_{n+1}}$.

Da $\frac{1}{2}\big(x_n + \frac{a}{x_n}\big)$ der Mittelpunkt von $[\frac{a}{x_n}, x_n]$ ist und außerdem $\frac{a}{x_n} \leq \frac{a}{x_{n+1}}$ gilt, erkennen wir, dass sich in jedem Schritt die Länge des Fehlerintervalls mindestens halbiert. Also ist die Länge des Intervalls $[\frac{a}{x_{n+1}}, x_{n+1}]$ kleiner oder gleich $\frac{(a-1)}{2^n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{(a-1)}{2^{n+1}}$.

Rechnerischer Ansatz. Der Induktionsanfang funktioniert wie oben. Der Induktionsschritt geht so:

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= x_{n+1} - \frac{a}{x_{n+1}} \\ &= \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) - \frac{a}{x_{n+1}} \\ &\overset{d)}{\leq} \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) - \frac{a}{x_n} \\ &= \frac{1}{2}(x_n - \frac{a}{x_n}) \\ &\overset{\text{Ind. Annahme}}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \frac{(a-1)}{2^n} \\ &= \frac{(a-1)}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

- *Wir zeigen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, woraus die Konvergenz in $\mathbb{R}$ folgt:*

  Dazu müssen wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ finden so dass $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > N$.

  O. B. d. A. nehmen wir an dass $n \geq m$. Wegen $\frac{a}{x_m} \overset{b)}{\leq} \sqrt{a} \overset{a3)}{\leq} x_n$ gilt $[x_n, x_m] \subseteq [\frac{a}{x_m}, x_m]$, also $|x_n - x_m| \leq \frac{|a-1|}{2^m}$. Für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ suchen wir also ein N mit $\frac{|a-1|}{2^N} < \varepsilon$. Ein solches existiert aber. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Cauchy-Folge und konvergiert nach dem Vollständigkeitsaxiom.

  Da $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, konvergiert auch die Folge $(\frac{a}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

- *Nachdem wir wissen, dass die beiden Folgen konvergieren, können wir ihre Grenzwerte zu bestimmen. Es gilt*

  $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) = \frac{1}{2}(\lim_{n\to\infty} x_n + \frac{a}{\lim_{n\to\infty} x_n}) \overset{y:=\lim x_n}{=} \frac{1}{2}(y + \frac{a}{y}).$$

  Andererseits ist

  $$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = y,$$

  also $y = \frac{1}{2}(y + \frac{a}{y})$, woraus $y^2 = a$ folgt. Daher konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{a}$. Zudem erhalten wir

  $$\lim_{n\to\infty} (\frac{a}{x_n}) = \frac{a}{\lim_{n\to\infty} x_n} = \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}.$$