Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Dr. B. Debrabant
F. Riechwald
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

12.11.2008

Analysis 1 für M, LaG M, Tutorium 5

T 14 Mächtigkeit

Zeige, dass die Menge der Nullstellen von allen Gleichungen der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \qquad n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{Z},\ i = 0, \ldots, n,$$

abzählbar ist.

T 15 Mächtigkeit

Zeige, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A (A kann auch unendlich sein) immer eine größere Mächtigkeit als die Menge A hat.

T 16 Quadratwurzeln

Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Wir wollen beweisen, dass $\sqrt{a}$ durch die Folge

$$x_0 = a, \ \ x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

approximiert werden kann.

a1) Zeige $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a2) Zeige $x_n^2 \geq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Zeige zunächst $s \cdot t \leq \frac{(s+t)^2}{4}$ für $s, t \in \mathbb{R}$.

a3) Beweise, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, und folgere daraus

$$x_1^2 \geq x_2^2 \geq \cdots \geq x_n^2 \geq x_{n+1}^2 \geq \cdots \geq a.$$

b) Zeige, dass die Folge $\left(\frac{a}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist und $\left(\frac{a}{x_n}\right)^2 \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

c) Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\frac{a}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen $\sqrt{a}$.
Hinweis: Betrachte die Länge $d_n := \left|x_n - \frac{a}{x_n}\right|$ des n-ten „Fehlerintervalls“ $\left[\frac{a}{x_n}, x_n\right]$ und zeige induktiv $d_n \leq \frac{|a-1|}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.