Analysis 1 für M, LaG M, Tutorium 4, Lösungsvorschlag

T 10 Supremum und Infimum von Mengen

a) Die Mengen A und B seien beschränkt. Zeige, dass

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

b) Bestimme das Supremum und das Infimum - falls sie existieren - der Mengen

$$A = \left\{\frac{m}{n} \mid n, m \in \mathbb{N},\ m < 2n\right\}, \quad B = \left\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\right\},$$

wobei $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$.

a) *Nehmen wir an, dass A und B nach oben beschränkt sind und $a = \sup A$ und $b = \sup B$. O. B. d. A. sei $a \leq b$. Dann gilt für jedes $x \in A \cup B$ die Ungleichung $x \leq b$. Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $x' \in B$, so dass*

$$x' > b - \epsilon$$

gilt. Aber x' liegt auch in $A \cup B$, weshalb b die kleinste obere Schranke von $A \cup B$ ist.

b) *2 ist die obere Schranke von A. Wir zeigen, dass sie die kleinste ist. Für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $n > [2/\epsilon]$ erhalten wir*

$$\frac{2(n-1)}{n} > 2 - \epsilon.$$

Die grösste untere Schranke ist 0. (Es ist $m/n > 0$, und für jedes $\epsilon > 0$ existiert $n = n(\epsilon)$, so dass $1/n < \epsilon$ gilt.)
Mit $n = k^2$, $k \in \mathbb{N}$, aus der Ungleichung $0 \leq \sqrt{n} - [\sqrt{n}] < 1$ folgt, dass $0 = \inf B$ ist ($0 \in B$).
Um $\sup B = 1$ zu zeigen, bemerken wir zuerst, dass $[\sqrt{n^2 + 2n}] = n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. (Beachte dabei $n^2 < n^2 + 2n < (n+1)^2$.) Dann ist für $0 < \epsilon < 1$ die folgende Ungleichung

$$\sqrt{n^2 + 2n} - [\sqrt{n^2 + 2n}] = \frac{2}{\sqrt{1 + 2/n} + 1} > 1 - \epsilon$$

für alle $n > (1-\epsilon)^2/(2\epsilon)$ erfüllt, weswegen $\sup B = 1$ ist.

T 11 Surjektivität, Injektivität und Bijektivität

Es seien $f : M \to N$ und $g : N \to P$ Abbildungen mit $g \circ f$ bijektiv.

Zeige, dass f injektiv und g surjektiv ist.

Finde ein Beispiel, in dem weder f noch g bijektiv sind.

Ist $f(x) = f(y)$, dann ist auch $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ und damit $x = y$. Also ist f injektiv.

Zu jedem $p \in P$ gibt es ein $m \in M$ mit $g \circ f(m) = p$. Also ist $f(m) \in N$ ein Urbild von p und g damit surjektiv.

Sei $M = P$ die einpunktige Menge $\{0\}$ und N die zweipunktige Menge $\{0, 1\}$. Die Abbildung $f : M \to N$, $0 \mapsto 0$ ist nicht surjektiv und die Abbildung $g : N \to P$, $x \mapsto 0$ ist nicht injektiv. Die Abbildung $g \circ f$ ist aber bijektiv.

T 12 Rationale und irrationale Zahlen

Man zeige in zwei Schritten, dass zwischen zwei rationalen Zahlen stets eine irrationale liegt:

1. Sei $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$. Man zeige: Es existiert eine irrationale Zahl im Intervall $[-q, q]$.
2. Sei nun allgemein $q_1 < q_2 \in \mathbb{Q}$. Man zeige: Es existiert eine irrationale Zahl im Intervall $[q_1, q_2]$.

1. *Vgl. Skript Prof. Alber, S. 33 Satz, Teil b) + Beweis, wobei $a = -q$ und $b = q$ gewählt werden:*

   Angenommen in $[-q, q]$ liegen ausschließlich rationale Zahlen und keine irrationalen. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

   $$[-nq, nq] \subset \mathbb{Q},$$

   da das Produkt einer rationalen und einer natürlichen Zahl rational ist.
   Sei nun r eine beliebige reelle Zahl. Da $q > 0$ ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

   $$r \in [-nq, nq]$$

   (wg. der archimedischen Anordnung der reellen Zahlen)
   Also ist r rational. Dies widerspricht zum Beispiel der Tatsache, dass $\sqrt{2}$ irrational ist. (Wurde in Probeübung/-vorlesung behandelt.)

2. *Sei $\tilde{q} := \frac{q_2 - q_1}{2} \in \mathbb{Q}$. Wegen $q_2 > q_1$ ist $\tilde{q} > 0$. Das Intervall $[-\tilde{q}, \tilde{q}]$ enthält nach Aufgabenteil a) eine irrationale Zahl r.*

   Es gilt außerdem $[q_1, q_2] = \frac{q_1+q_2}{2} + [-\tilde{q}, \tilde{q}] = \{\frac{q_1+q_2}{2} + z | z \in [-\tilde{q}, \tilde{q}]\}$. Somit liegt die Zahl $\frac{q_1+q_2}{2} + r$ in $[q_1, q_2]$. Außerdem ist $\frac{q_1+q_2}{2} + r$ irrational, denn sonst wäre $r \in \mathbb{Q}$, da $\mathbb{Q}$ ein Körper ist und $\frac{q_1+q_2}{2} \in \mathbb{Q}$.

T 13 Polynome

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ mit x_i paarweise verschieden.

a) Gib Polynome $L_{i,n}$, $i = 0, \ldots, n$, n-ten Grades an, so dass $L_{i,n}(x_j) = 1$ für $i = j$ bzw. $L_{i,n}(x_j) = 0$ sonst gelten.

b) Konstruiere mit Hilfe der Polynome aus Teil a) zu gegebenen reellen Zahlen $y_0, \ldots, y_n$ ein Polynom p so, dass $p(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$.

c) Zeige, dass $\sum_{i=0}^n L_{i,n} \equiv 1$ gilt.

a) $L_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

b) $p(x) = y_0 L_{0,n}(x) + \ldots + y_n L_{n,n}(x)$

c) Folgt aus dem Satz auf S.39 des Skriptes.