Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Dr. B. Debrabant
F. Riechwald
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

05.11.2008

Analysis 1 für M, LaG M, Tutorium 4

T 10 Supremum und Infimum von Mengen

a) Die Mengen A und B seien beschränkt. Zeige, dass

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

b) Bestimme das Supremum und das Infimum - falls sie existieren - der Mengen

$$A = \left\{ \frac{m}{n} \mid n, m \in \mathbb{N},\ m < 2n \right\}, \quad B = \left\{ \sqrt{n} - [\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N} \right\},$$

wobei $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$.

T 11 Surjektivität, Injektivität und Bijektivität

Es seien $f : M \to N$ und $g : N \to P$ Abbildungen mit $g \circ f$ bijektiv.

Zeige, dass f injektiv und g surjektiv ist.

Finde ein Beispiel, in dem weder f noch g bijektiv sind.

T 12 Rationale und irrationale Zahlen

Man zeige in zwei Schritten, dass zwischen zwei rationalen Zahlen stets eine irrationale liegt:

1. Sei $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$. Man zeige: Es existiert eine irrationale Zahl im Intervall $[-q, q]$.
2. Sei nun allgemein $q_1 < q_2 \in \mathbb{Q}$. Man zeige: Es existiert eine irrationale Zahl im Intervall $[q_1, q_2]$.

T 13 Polynome

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ mit x_i paarweise verschieden.

a) Gib Polynome $L_{i,n}$, $i = 0, \ldots, n$, n-ten Grades an, so dass $L_{i,n}(x_j) = 1$ für $i = j$ bzw. $L_{i,n}(x_j) = 0$ sonst gelten.

b) Konstruiere mit Hilfe der Polynome aus Teil a) zu gegebenen reellen Zahlen $y_0, \ldots, y_n$ ein Polynom p so, dass $p(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$.

c) Zeige, dass $\sum_{i=0}^{n} L_{i,n} \equiv 1$ gilt.