Analysis 1 für M, LaG M, Tutorium 3, Lösungsvorschlag

T 7 Vollständige Induktion

a) Beweise die folgende Behauptung mittels vollständiger Induktion:

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

wobei alle $x_1, x_2, ..., x_n$ dasselbe Vorzeichen haben und grösser als -1 sind.

b) Zeige, dass für $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}.$$

a) Induktionsanfang $n = 1$: $1 + x_1 \geq 1 + x_1$, also stimmt die Aussage für $n = 1$.
Der Induktionsschritt von $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)(1+x_{n+1}) &\geq (1+x_1+x_2+\cdots+x_n)(1+x_{n+1}) \\ &\geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}+(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_{n+1} \\ &\geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1},\end{aligned}$$

weil die Ungleichung $(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_{n+1} \geq 0$ für x_i mit demselbe Vorzeichen gilt.

b) Induktionsanfang $n = 0$:

$$1 + x^{2^0} = 1 + x = \frac{(1+x)(1-x)}{1-x} = \frac{1 - x^{2^1}}{1-x}$$

Also stimmt die Aussage für $n = 0$.
Induktionsschritt $n \to n+1$:
Angenommen es gelte

$$(IV) \qquad \prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}.$$

Dann erhält man

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n+1} \left(1 + x^{2^k}\right) &= \left(1 + x^{2^{n+1}}\right) \cdot \prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right) \\ &\overset{(IV)}{=} \left(1 + x^{2^{n+1}}\right) \cdot \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1-x} = \frac{1 - x^{2^{n+2}}}{1-x},\end{aligned}$$

wegen $(1-b)(1+b) = 1 - b^2$ und $\left(x^{2^{n+1}}\right)^2 = x^{2^{n+2}}$.

T 8 Axiome

a) Gegeben sei ein beliebiger Körper $(K, +, \cdot)$. Zeige, dass für $a, b \in K$ mit $a, b \neq 0$ gilt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \;=\; \frac{a+b}{a \cdot b}.$$

b) Verwende die Körper- und Anordnungsaxiome der reellen Zahlen, um die folgende Aussage zu beweisen.

$$0 < a < b \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} > \frac{1}{b}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

a) *Zu verwenden sind ausschließlich die Körperaxiome, also A1-A9.*
Feststellung: Mit $\frac{a+b}{(a \cdot b)}$ *ist* $(a+b) \cdot \frac{1}{(a \cdot b)}$ *gemeint. Wegen* $a, b \neq 0$ *gilt* $a \cdot b \neq 0$ *(Schlussfolgerung aus den Axiomen in der Vorlesung), weshalb das Inverse* $\frac{1}{(a \cdot b)}$ *existiert.*
Zunächst multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit $a \cdot b$*:*

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \;=\; (a+b) \cdot \frac{1}{(a \cdot b)} \\
\Leftrightarrow\quad & \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot (a \cdot b) \;=\; \left((a+b) \cdot \frac{1}{(a \cdot b)}\right) \cdot (a \cdot b) \\
& \qquad \textit{wobei „}\Leftarrow\textit{“ aus Multiplikation mit dem inversen Element zu } a \cdot b \textit{ folgt} \\
\overset{A6}{\Leftrightarrow}\quad & \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot (a \cdot b) \;=\; (a+b) \cdot \left(\frac{1}{(a \cdot b)} \cdot (a \cdot b)\right) \\
\overset{A5}{\Leftrightarrow}\quad & \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot (a \cdot b) \;=\; (a+b) \cdot \left((a \cdot b) \cdot \frac{1}{(a \cdot b)}\right) \overset{Def.d.Inv.}{=} (a+b) \cdot 1 \overset{vgl.A7}{=} a+b \\
\overset{A9}{\Leftrightarrow}\quad & \frac{1}{a} \cdot (a \cdot b) + \frac{1}{b} \cdot (a \cdot b) \;=\; a+b \\
\overset{A6,A5}{\Leftrightarrow}\quad & \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot b + (a \cdot b) \cdot \frac{1}{b} \;=\; a+b \\
\overset{A5,A6}{\Leftrightarrow}\quad & \left(a \cdot \frac{1}{a}\right) \cdot b + a \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) \;=\; a+b \\
\overset{vgl.A7}{\Leftrightarrow}\quad & 1 \cdot b + a \cdot 1 \;=\; a+b \\
\overset{A5}{\Leftrightarrow}\quad & b \cdot 1 + a \cdot 1 \;=\; a+b \\
\overset{vgl.A7}{\Leftrightarrow}\quad & b + a \;=\; a+b \\
\overset{A1}{\Leftrightarrow}\quad & a + b \;=\; a+b
\end{aligned}$$

Dies ist eine wahre Aussage, was die ursprüngliche beweist.

b) *Zunächst folgt aus $0 < a < b$, dass $a \cdot b > 0$ ist. Damit gilt ebenfalls $\frac{1}{a \cdot b} > 0$. (vgl. Skript S. 18, Folgerung 4)*

Außerdem gilt $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a \cdot b}$, wegen des Assoziativgesetzes A6 für die Multiplikation.

Der restliche Beweis ist ebenfalls im Skript S. 18 (Folgerung 5) zu finden:

Aus $a < b$ erhalten wir nämlich

$$\frac{1}{b} \overset{vgl. A7, A6}{=} \frac{1}{b} \cdot a \cdot \frac{1}{a} \overset{A6,A5}{=} a \cdot \frac{1}{a \cdot b} \overset{A13}{<} b \cdot \frac{1}{a \cdot b} \overset{A6,A5}{=} \frac{1}{a} \cdot b \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a}.$$

T 9 Vollständige Induktion

Finde den Fehler im nachfolgenden Beweis der Aussage „Wenn sich in einer Gruppe von $n \in \mathbb{N}$ Tieren mindestens ein Elefant befindet, so sind alle Tiere Elefanten. “

Induktionsanfang: $n = 1$: Klar.

Induktionsvoraussetzung: Die Aussage sei wahr für Gruppen von n Tieren.

Induktionsschritt: $n \to n + 1$:

In einer Gruppe von $n + 1$ Tieren befinde sich ein Elefant. Wir trennen eines der anderen Tiere (also nicht den einen Elefanten) von der Gruppe. Dadurch erhalten wir eine Gruppe von n Tieren, welche einen Elefanten enthält und nach Induktionsvoraussetzung also nur aus Elefanten besteht.

Das einzelne Tier muss auch ein Elefant sein: Dazu nehmen wir das einzelne Tier wieder zu den n Elefanten hinzu und trennen einen der anderen Elefanten von der Gruppe. Das ergibt wieder eine Gruppe von n Tieren, die mindestens einen Elefanten enthält. Somit sind alle Tiere darin Elefanten.

q. e. d.

Der Fehler liegt im Induktionsschritt von 1 nach 2: Haben wir zwei Tiere, davon einen Elefanten und trennen die beiden, so enthält die „Gruppe“mit dem Elefanten mind. einen Elefanten und besteht daher nur aus Elefanten. Dies ist noch korrekt.

Fügen wir nun das zweite Tier wieder zur Gruppe hinzu und entfernen ein anderes, so ist nicht mehr sicher ein Elefant in der Gruppe und die Induktionsvoraussetzung hier nicht anwendbar.