Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Dr. B. Debrabant
F. Riechwald
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

29.10.2008

Analysis 1 für M, LaG M, Tutorium 3

T 7 Vollständige Induktion

a) Beweise die folgende Behauptung mittels vollständiger Induktion:

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

wobei alle $x_1, x_2, ..., x_n$ dasselbe Vorzeichen haben und grösser als -1 sind.

b) Zeige, dass für $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right) \;=\; \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

T 8 Axiome

a) Gegeben sei ein beliebiger Körper $(K, +, \cdot)$. Zeige, dass für $a, b \in K$ mit $a, b \neq 0$ gilt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \;=\; \frac{a+b}{a \cdot b}.$$

b) Verwende die Körper- und Anordnungsaxiome der reellen Zahlen, um die folgende Aussage zu beweisen.

$$0 < a < b \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} > \frac{1}{b}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

T 9 Vollständige Induktion

Finde den Fehler im nachfolgenden Beweis der Aussage „Wenn sich in einer Gruppe von $n \in \mathbb{N}$ Tieren mindestens ein Elefant befindet, so sind alle Tiere Elefanten. “

Induktionsanfang: $n = 1$: Klar.

Induktionsvoraussetzung: Die Aussage sei wahr für Gruppen von n Tieren.

Induktionsschritt: $n \to n+1$:

In einer Gruppe von $n+1$ Tieren befinde sich ein Elefant. Wir trennen eines der anderen Tiere (also nicht den einen Elefanten) von der Gruppe. Dadurch erhalten wir eine Gruppe von n Tieren, welche einen Elefanten enthält und nach Induktionsvoraussetzung also nur aus Elefanten besteht.

Das einzelne Tier muss auch ein Elefant sein: Dazu nehmen wir das einzelne Tier wieder zu den n Elefanten hinzu und trennen einen der anderen Elefanten von der Gruppe. Das ergibt wieder eine Gruppe von n Tieren, die mindestens einen Elefanten enthält. Somit sind alle Tiere darin Elefanten.

q. e. d.