Analysis 1 für M, LaG M, Tutorium 2, Lösungsvorschlag

T 4 Relationen

a) Welche der folgenden Relationen zwischen natürlichen Zahlen sind reflexiv, welche sind symmetrisch und welche transitiv:

1. $a \neq b$,
2. $a < b$,
3. a unterscheidet sich von b nicht mehr als um 2,
4. a und b haben einen gemeinsamen natürlichen Teiler, der ungleich 1 ist.

b) Sei $\sim$ eine reflexive Relation. Zeige, dass $\sim$ symmetrisch und transitiv ist genau dann, wenn $a \sim b,\ a \sim c \Rightarrow b \sim c$ gilt.

a) 1. *Die Relation $a \neq b$ ist nicht reflexiv, symmetrisch (aus $a \neq b$ folgt $b \neq a$), nicht transitiv (aus $a \neq b$ und $b \neq c$ folgt nicht, dass $a \neq c$ sein muss).*

2. *Die Relation $a < b$ ist nicht reflexiv, nicht symmetrisch (wenn $a < b$ ist, kann nicht $b < a$ gelten), aber transitiv (aus $a < b$ und $b < c$ folgt, dass $a < c$ ist).*

3. *Diese Relation ist reflexiv, symmetrisch, aber nicht transitiv ($a = 2,\ b = 4,\ c = 6$).*

4. *Diese Relation ist reflexiv, symmetrisch (bis auf $1 \sim 1$), aber nicht transitiv ($a = 2,\ b = 6,\ c = 3$).*

b) 1. *($\Rightarrow$) Sei $\sim$ symmetrisch und transitiv. Wir nehmen a, b, c mit $a \sim b$ und $a \sim c$. Aus $a \sim b$ folgt wegen Symmetrie, dass $b \sim a$ ist, und wegen Transitivität folgt aus $b \sim a$ und $a \sim c$, dass $b \sim c$ ist. Daher gilt $a \sim b,\ a \sim c \Rightarrow b \sim c$.*

2. *($\Leftarrow$) Wie nehmen an, dass für a, b, c mit $a \sim b,\ a \sim c$ die Aussage $b \sim c$ gilt. Da $\sim$ reflexiv ist, ist $a \sim a$ und wegen Annahme haben wir $a \sim b,\ a \sim a \Rightarrow b \sim a$. Also $\sim$ ist symmetrisch. Ist $a \sim b$ und $b \sim c$, dann ist auch wegen schon bewiesener Symmetrie $b \sim a$ und $b \sim c$, woraus nach unsere Annahme $a \sim c$ folgt. Die Relation $\sim$ ist daher symmetrisch und transitiv.*

T 5 Potenzmengen

Schreibe die Potenzmengen $\mathcal{P}(M)$ folgender Mengen auf:

$$(a)\ M = \emptyset, \quad (b)\ M = \{\emptyset, a, b\}, \quad (c)\ M = \{\emptyset, \{a\}, a\}, \quad (d)\ M = \{a, a, b, c\}.$$

Wieviel Elemente hat die Potenzmenge einer $n-$elementigen Menge für $n = 0, 1, 2, 3$. Ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ größer als M, kleiner oder gleich groß?

Die Potenzmengen sind:

(a) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$;

(b) $\mathcal{P}(\{\emptyset, a, b\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{\emptyset, a\}, \{\emptyset, b\}, \{\emptyset, a, b\}\}$;

(c) $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{a\}, a\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{a\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, a\}, \{\emptyset, \{a\}\}, \{a, \{a\}\}, \{\emptyset, a, \{a\}\}\}$;

(d) *Es ist* $\{a, a, b, c\} = \{a, b, c\}$ *und daher*
$\mathcal{P}(\{a, a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Die Potenzmenge einer $n-$elementigen Menge M hat immer 2^n Elemente und ist somit auch größer als M.

T 6 Modulorechnung und Äquivalenzklassen

Gegeben sei die Grundmenge $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wir definieren nun eine Äquivalenzrelation $R(m) \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ für ein festes $m \in \mathbb{N}$:

Seien $a, b \in \mathbb{N}_0$. Dann gelte

$$a \sim_m b :\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a = k \cdot m + b.$$

Wir sagen dann *a ist kongruent b modulo m.*

(a) Zeige, dass $R(m)$ eine Äquivalenzrelation ist.

Eine Teilmenge von R, die nur Elemente enthält, die zueinander äquivalent sind, nennt man auch *Äquivalenzklasse*. Sie wird für gewöhnlich mit ihrem kleinsten Element in eckigen Klammern bezeichnet.

(b) Versuche, die Äquivalenzklassen von 0 und 1, also $[0]$ und $[1] \subset \mathbb{N}_0$ anzugeben.

(c) Wie sieht die Menge aller Äquivalenzklassen aus?

(d) Wir betrachten nun $R(m)$ für ein festes m, nämlich $m = 5$.
Bestimme die Äquivalenzklassen von $6, 7$ und $6 + 7$. Was fällt Dir auf?
Welche Bedingungen sollte die Definition der Addition auf der Menge der Äquivalenzklassen also sinnvollerweise erfüllen?
Definiere eine Addition auf der Menge der Äquivalenzklassen und zeige, dass sie im obigen Sinne sinnvoll ist.

(a) *Wir zeigen, dass $\sim_m$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, wo*

$$a \sim_m b :\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a = k \cdot m + b.$$

reflexiv: $\exists k \in \mathbb{Z} : a = k \cdot m + a$. *Lösung:* $k = 0$.
symmetrisch: wenn $a = k \cdot m + b$, *dann* $\exists l \in \mathbb{Z} : b = l \cdot m + a$. *Lösung:* $l = -k$, *denn* $(-k) \cdot m + a = (-k) \cdot m + (k \cdot m + b) = [\textit{Körperaxiom}] = ((-k) \cdot m + k \cdot m) + b = b$.
transitiv: $a = k \cdot m + b$ *und* $b = l \cdot m + c$, *dann* $\exists n \in \mathbb{Z} : a = n \cdot m + c$. *Lösung:* $l = k + l$, *denn* $a = (k + l) \cdot m + c = k \cdot m + (l \cdot m + c) = k \cdot m + b$.

(b)

$$[0] = \{a \in \mathbb{N}_0 \mid a = k \cdot m + 0 = k \cdot m \text{ für } k \in \mathbb{Z}\} = \{0, m, 2m, 3m, ...\} =: m\mathbb{N}_0,$$

$$[1] = \{a \in \mathbb{N}_0 \mid a = k \cdot m + 1 \text{ für } k \in \mathbb{Z}\} = \{1, m+1, 2m+1, 3m+1, ...\} =: m\mathbb{N}_0 + 1.$$

(c) Es gibt genau m Äquivalenzklassen:

$$\begin{aligned} [0] &= m\mathbb{N}_0, \\ [1] &= m\mathbb{N}_0 + 1, \\ &\vdots \\ [m-2] &= m\mathbb{N}_0 - 2 = \{m-2, 2m-2, 3m-2, 4m-2, ...\}, \\ [m-1] &= m\mathbb{N}_0 - 1 = \{m-1, 2m-1, 3m-1, 4m-1, ...\}. \end{aligned}$$

Die Menge der Äquivalenzklassen ist dann $\{[0], [1], ..., [m-1]\}$.

(d) Wir erhalten

$$[6] = [1], \text{ da } 6 = 1 \cdot 5 + 1,$$

$$[7] = [2], \text{ da } 7 = 1 \cdot 5 + 2,$$

$$[6+7] = [13] = [3], \text{ da } 13 = 2 \cdot 5 + 3.$$

Definiert man eine Addition auf Menge der Äquivalenzklassen, so sollte das Ergebnis unabhängig von dem Repräsentanten der Klasse sein, mit dem man die Addition durchgeführt. Das nennt man „unabhängig von der Wahl des Repräsentanten“ oder auch „wohldefiniert“, und darauf deutet die obige Rechnung hin.
Wir definieren also $[m] + [n] := [m+n]$.
Wähle statt m nun m' mit $m' = k \cdot 5 + m$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, und statt n wählen wir n' mit $n' = k' \cdot 5 + n$ für ein $k' \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $m' + n' = k \cdot 5 + m + k' \cdot 5 + n = (k + k') \cdot 5 + (n + m)$, also gilt $[m' + n'] = [m + n]$, was bedeutet, dass es egal ist, welchen Repräsentanten man betrachtet.