Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Dr. B. Debrabant
F. Riechwald
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

22.10.2008

Analysis 1 für M, LaG M, Tutorium 2

T 4 Relationen

a) Welche der folgenden Relationen zwischen natürlichen Zahlen sind reflexiv, welche sind symmetrisch und welche transitiv:

1. $a \neq b$,
2. $a < b$,
3. a unterscheidet sich von b nicht mehr als um 2,
4. a und b haben einen gemeinsamen natürlichen Teiler, der ungleich 1 ist.

b) Sei $\sim$ eine reflexive Relation. Zeige, dass $\sim$ symmetrisch und transitiv ist genau dann, wenn $a \sim b,\ a \sim c \Rightarrow b \sim c$ gilt.

T 5 Potenzmengen

Schreibe die Potenzmengen $\mathcal{P}(M)$ folgender Mengen auf:

$$(a)\ M = \emptyset, \quad (b)\ M = \{\emptyset, a, b\}, \quad (c)\ M = \{\emptyset, \{a\}, a\}, \quad (d)\ M = \{a, a, b, c\}.$$

Wieviel Elemente hat die Potenzmenge einer $n-$elementigen Menge für $n = 0, 1, 2, 3$. Ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ größer als M, kleiner oder gleich groß?

T 6 Modulorechnung und Äquivalenzklassen

Gegeben sei die Grundmenge $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wir definieren nun eine Äquivalenzrelation $R(m) \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ für ein festes $m \in \mathbb{N}$:

Seien $a, b \in \mathbb{N}_0$. Dann gelte

$$a \sim_m b :\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a = k \cdot m + b.$$

Wir sagen dann *a ist kongruent b modulo m.*

(a) Zeige, dass $R(m)$ eine Äquivalenzrelation ist.

Eine Teilmenge von R, die nur Elemente enthält, die zueinander äquivalent sind, nennt man auch *Äquivalenzklasse*. Sie wird für gewöhnlich mit ihrem kleinsten Element in eckigen Klammern bezeichnet.

(b) Versuche, die Äquivalenzklassen von 0 und 1, also [0] und $[1] \subset \mathbb{N}_0$ anzugeben.

(c) Wie sieht die Menge aller Äquivalenzklassen aus?

(d) Wir betrachten nun $R(m)$ für ein festes m, nämlich $m = 5$.

Bestimme die Äquivalenzklassen von $6, 7$ und $6 + 7$. Was fällt Dir auf?

Welche Bedingungen sollte die Definition der Addition auf der Menge der Äquivalenzklassen also sinnvollerweise erfüllen?

Definiere eine Addition auf der Menge der Äquivalenzklassen und zeige, dass sie im obigen Sinne sinnvoll ist.