

Analysis 1 für M, LaG M, Tutorium 1, Lösungsvorschlag

T 1 Mengen

- a) Welche der folgenden Gleichungen gelten für beliebige Mengen A, B, C ? Begründe Deine Antwort.

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$$

$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$$

- b) Es sei X eine Menge und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen. Beweise, dass

$$X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i).$$

Bemerkung: Ist jedes A_i Teilmenge von X , so folgt insbesondere die de Morgansche Identität $(\bigcap_{i \in I} A_i)' = \bigcup_{i \in I} (A_i)'$.

- c) Gibt es Mengen A, B, C , welche gleichzeitig die Eigenschaften $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ und $(A \cap B) \setminus C = \emptyset$ besitzen?

- a) – *Richtig:*

Wir zeigen dazu die beiden Teilmengenbeziehungen

1. $(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$

2. $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$

zu 1. $(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$:

Sei $x \in (A \cap B) \cup C$, so liegt x in C oder in $A \cap B$.

Falls $x \in C$, so gelten $x \in A \cup C$ und $x \in B \cup C$, weshalb x auch in der Vereinigung dieser Mengen liegt, also $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Liegt x in $A \cap B$, so gelten $x \in A$ als auch $x \in B$. Damit ist $x \in A \cup C$ und gleichzeitig $x \in B \cup C$. Folglich gilt auch $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Zu 2. $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$:

Sei $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$, dann gelten $x \in A \cup C$ und $x \in B \cup C$. Gilt nun außerdem, dass $x \in C$ ist, so haben wir auch $x \in (A \cap B) \cup C$.

Andernfalls, also falls x nicht in C liegt, so muss x sowohl in A als auch in B liegen, daher $x \in A \cap B$ und folglich ebenfalls $x \in (A \cap B) \cup C$.

- *Diese Aussage ist falsch:*

Wir nehmen $A = \{1\}$, $C = \{1\}$ und $B = \{1\}$. Dann ist $(A \cup B) \setminus C = \emptyset$ und $(A \setminus C) \cup B = \{1\}$.

- *Richtig:*

$$x \in (A \cap B) \setminus C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \text{ und } x \in B) \text{ und } x \notin C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \text{ und } x \notin C) \text{ und } x \in B$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \setminus C) \cap B.$$

- b) $x \in X \setminus (\bigcap_{i \in I} A_i)$
 $\Leftrightarrow x \in X$ aber x liegt nicht in $\bigcap_{i \in I} A_i$
 $\Leftrightarrow x \in X$ und es gibt mindestens ein $i \in I$, so dass $x \notin A_i$
 \Leftrightarrow es gibt mindestens ein $i \in I$, so dass $x \in X \setminus A_i$ gilt
 $\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$.
- c) Solche Mengen gibt es nicht. Angenommen es ist möglich. Da $A \cap B \neq \emptyset$ ist, gibt es ein $x \in A \cap B$. Aus $A \cap C = \emptyset$ folgt, dass $x \notin C$ gilt. Wir erhalten $x \in A \cap B$ und $x \notin C$, was bedeutet $x \in (A \cap B) \setminus C = \emptyset$. Widerspruch.

T 2 Aussagen, Verknüpfung und Negation

- a) Seien A, B, C Aussagen. Mit \bar{A} bezeichnet man die Negation der Aussage A . Beweise die Richtigkeit folgender Aussagen anhand von Wahrheitstafeln:

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow (\bar{A} \vee \bar{B})$$

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$$

- b) Formuliere die folgenden Aussagen in Worten und ersetze falsche Aussagen durch ihre Negation. Dabei seien $x, y, z \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$$\forall x \exists y : x = y + y$$

$$\exists x \exists y : (x \neq y) \wedge (x^y = y^x)$$

$$\exists x \forall y \exists z : (y > x) \Rightarrow (y = xz)$$

a)

A	B	C	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
W	W	W	W	W
W	W	F	W	W
W	F	F	F	F
F	F	F	F	F
F	W	F	F	F
W	F	W	W	W
F	W	W	F	F
F	F	W	F	F

A	B	$\overline{A \wedge B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$
W	W	F	F
W	F	W	W
F	W	W	W
F	F	W	W

A	B	$(A \Rightarrow B)$	$(\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$
W	W	W	W
W	F	F	F
F	W	W	W
F	F	W	W

- b) – Für jedes x gibt es ein y , so dass $x = y + y$. Diese Aussage stimmt nicht für alle natürlichen x , nur für gerade. Die Negation dieser Aussage ist $\exists x \forall y : x \neq y + y$ (Es gibt ein x , so dass für alle y die Gleichung $x = y + y$ nicht erfüllt ist.)
- Es existieren ein x und ein y , so dass $x \neq y$ ist und die Gleichung $x^y = y^x$ erfüllt ist. Diese Aussage stimmt. Wir können $x = 2$ und $y = 4$ wählen.
- Es existiert ein x , so dass für alle $y > x$ ein z existiert, das die Gleichung $y = xz$ erfüllt. Diese Aussage ist auch richtig. Wir wählen $x = 1$.

T 3 Äquivalenzrelationen

Wir nennen zwei natürliche Zahlen a und b äquivalent, wenn Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $a^p = b^q$ gilt.

Beweise, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Kannst Du die Äquivalenzklassen dieser Relation angeben?

Um zu beweisen, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist, sollen wir prüfen, ob sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

1. Sie ist reflexiv, da wir $p = q$ wählen können.
2. Sie ist symmetrisch. Wenn $a \sim b$ ist, d.h. es existieren p, q aus \mathbb{N} , so dass $a^p = b^q$ ist, dann ist auch $b \sim a$, d.h. $b^q = a^p$.
3. Diese Relation ist transitiv. Seien $a \sim b$ und $b \sim c$. Das bedeutet, dass es $p, q, r, s \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $a^p = b^q$ ist und $b^r = c^s$ ist. Dann gilt $a^{pr} = b^{qr}$ und $b^{qr} = c^{sq}$. Es existieren also die natürlichen Zahlen $k = pr$ und $n = sq$, so dass $a^k = c^n$ gilt, und daher ist $a \sim c$.
4. Eine Äquivalenzklasse ist durch die folgende Menge repräsentiert:

$$A_a = \{a^k \mid k \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{N} \text{ wobei } (\forall b \in \mathbb{N} : b < a), (\forall n \in \mathbb{N}) (a \neq b^n)\}.$$

Mit anderen Worten wird jede Äquivalenzklasse A_a durch alle möglichen Potenzen der Zahl $a \in \mathbb{N}$ repräsentiert, wobei a die Eigenschaft erfüllt, dass es keine kleinere als a Zahl $b \in \mathbb{N}$ existiert, so dass a eine Potenz von b ist. Für die Elemente c, d aus dieser Menge haben wir, dass sie zueinander äquivalent sind, weil Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $c = a^n$ und $d = a^m$ gelten. Wir wählen $p = m$ und $q = n$. Dann ist $c^m = d^n$.

5. Möchte man noch zeigen, dass dies tatsächlich die Äquivalenzklassen sind, könnte man wie folgt vorgehen:

Beweise, dass kein $c \in \mathbb{N}$ existiert, das gleichzeitig zu den Mengen A_a und A_b mit $a \neq b$ gehört. (Daraus folgt sofort, dass die Elemente aus A_a nicht zu den Elementen A_b äquivalent sein können.)

Angenommen es gibt ein $c \in \mathbb{N}$, mit der oben beschriebenen Eigenschaft. Dann gibt es $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, so dass $c = a^m = b^n$ ist. Wir zeigen gleich, dass dann $d \in \mathbb{N}$ mit $d \leq a$, $d \leq b$ und $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $a = d^{p_1}$ und $b = d^{p_2}$ gelten. Das widerspricht der Definition der Mengen A_a und A_b :

Sei $c = c_1^{l_1} c_2^{l_2} \cdots c_k^{l_k}$ die eindeutige Primzahlzerlegung für die Zahl $c \in \mathbb{N}$, wobei l_1, l_2, \dots, l_k festgelegte natürliche Zahlen sind und die Primzahlen c_1, c_2, \dots, c_k verschieden sind. Dann sind $a = c_1^{\frac{l_1}{m}} c_2^{\frac{l_2}{m}} \cdots c_k^{\frac{l_k}{m}}$ und $b = c_1^{\frac{l_1}{n}} c_2^{\frac{l_2}{n}} \cdots c_k^{\frac{l_k}{n}}$ die eindeutigen Primzahlzerlegungen von a und b . Sei p das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen n und m . Dann ist p auch gemeinsamer Teiler von l_1, \dots, l_k . Wir setzen $d \equiv c_1^{\frac{l_1}{p}} c_2^{\frac{l_2}{p}} \cdots c_k^{\frac{l_k}{p}}$. Da $\frac{l_i}{p} \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, k$, ist $d \in \mathbb{N}$. Die Zahlen $p_1 \equiv \frac{p}{m}$ und $p_2 \equiv \frac{p}{n}$ gehören auch zu \mathbb{N} . Außerdem ist $d \leq a$, $d \leq b$ und $d^{p_1} = a$, $d^{p_2} = b$. Widerspruch.