Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

05.02.2010

14. Übung Analysis I
Wintersemester 2009/2010

(G14.1)

Man zeige, dass die Grenzwerte

(a) $\lim_{x\searrow 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}$, (b) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x\sin x(x-2)^5}{e^{2x}}$, (c) $\lim_{x\searrow 1}\frac{x^x-x}{1-x+\log x}$, (d) $\lim_{x\searrow 0}x^{\sin x}$

existieren und berechne sie.

Lösung.

(a) Es gilt $\lim_{x\searrow 0}\log(\cos x)=0=\lim_{x\searrow 0}x^2$ und mit $g(x)=x^2$ gilt $g'(x)\neq 0$ für $x\neq 0$. Wir benutzen die Regeln von de l'Hospital zweimal und erhalten

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\searrow 0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x}=\lim_{x\searrow 0}\frac{\frac{-1}{\cos^2 x}}{2}=-\frac{1}{2}.$$

(b) Es gilt $e^{2x}=e^xe^x$ und nach (12.2) gilt

$$\left|\frac{e^x\sin x\,(x-2)^5}{e^{2x}}\right|=\left|\frac{\sin x\,(x-2)^5}{e^x}\right|\leq\frac{|(x-2)^5|}{e^x}\overset{x\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Also gilt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x\sin x\,(x-2)^5}{e^{2x}}=0.$$

(c) Wir benutzen die Regeln von de l'Hospital für die Funktionen

$$f,g:]0,\infty[\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^x-x,\quad g(x)=1-x+\log x.$$

Wir bemerken, dass $g'(x)=-1+\frac{1}{x}\neq 0$ für $x\neq 1$, und erhalten

$$\lim_{x\searrow 1}\frac{x^x-x}{1-x+\log x}=\lim_{x\searrow 1}\frac{x^x(\log x+1)-1}{-1+\frac{1}{x}}.$$

Es gilt

$$\lim_{x\searrow 1}x^x(\log x+1)-1=\lim_{x\searrow 1}-1+\frac{1}{x}=0$$

und

$$g''(x)=-\frac{1}{x^2}\neq 0,$$

und somit können wir de l'Hospitals Regel nochmals benutzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{x\searrow 1}\frac{x^x-x}{1-x+\log x}&=\lim_{x\searrow 1}\frac{x^x(\log x+1)-1}{-1+\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\searrow 1}\frac{x^x(\frac{1}{x}+(\log x+1)^2)}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{1(1+1)}{-1}=-2.\end{aligned}$$

(d) Für $x>0$ gilt $x^{\sin x}=e^{\sin x\log x}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{x\searrow 0}\sin x\log x&=\lim_{x\searrow 0}\frac{\log x}{1/\sin x}\\&\overset{\text{l'Hosp.}}{=}-\lim_{x\searrow 0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}\\&\overset{\text{l'Hosp.}}{=}-\lim_{x\searrow 0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x-x\sin x}=\frac{0}{1}=0.\end{aligned}$$

Also gilt $\lim_{x\searrow 0}x^{\sin x}=e^0=1$.

■

(G14.2)

Seien $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a<b$ und sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Es gebe ein $\delta>0$, so dass $f(x)\geq\delta$ für alle $x\in[a,b]$. Man zeige: Die Funktion $\frac{1}{f}$ ist Riemann-integrierbar.

Lösung.

Sei $\varepsilon>0$ vorgegeben. Nach § 18, Satz 2, existieren Treppenfunktionen $\phi,\psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit

$$\phi\leq f\leq\psi$$

und

$$\int_a^b(\psi(x)-\phi(x))\,dx\leq\varepsilon':=\delta^2\varepsilon.$$

O.B.d.A. können wir annehmen, dass $\phi(x)\geq\delta$ für alle $x\in[a,b]$. Dann sind $\frac{1}{\phi}$ und $\frac{1}{\psi}$ Treppenfunktionen auf $[a,b]$, so dass

$$\frac{1}{\psi}\leq\frac{1}{f}\leq\frac{1}{\phi}\leq\frac{1}{\delta}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(\frac{1}{\phi(x)} - \frac{1}{\psi(x)}\right) dx &= \int_a^b \frac{1}{\phi(x)\psi(x)}(\psi(x) - \phi(x))\, dx \\ &\leq \frac{1}{\delta^2}\int_a^b (\psi(x) - \phi(x))\, dx \leq \frac{\varepsilon'}{\delta^2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Daher ist $\frac{1}{f}$ nach § 18, Satz 2, Riemann-integrierbar.

$\blacksquare$

Diese Woche gibt es keine Hausaufgaben. Stattdessen gibt es eine Probeklausur, die auf der Homepage erhältlich ist. Sie können diese Probeklausur zu Hause bearbeiten. Die Probeklausur wird dann in den Übungen am 12.02. besprochen.