



Analysis I

Übung 13

Aufgabe 1

Wir betrachten die Funktionen $f, g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^x \quad \text{und} \quad g(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right).$$

- (a) Berechnen Sie die Ableitungen f' und g' .
- (b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f und g .

Lösung. (a) Wegen $f(x) = x^x = e^{x \log(x)}$ erhalten wir

$$f'(x) = e^{x \log(x)} \left(\log x + x \frac{1}{x} \right) = (\log x + 1) e^{x \log(x)}.$$

Für g erhalten wir

$$g'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} \cos \frac{1}{x^2+1}.$$

- (b) Die Gleichung $f'(x) = 0$ liefert

$$\log x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \log x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{e}.$$

Wegen

$$f''(x) = (\log x + 1)^2 e^{x \log(x)} + x^{-1} e^{x \log(x)}$$

ist $f''(1/e) = 0 + e \cdot e^{-1/e} = e^{1-1/e} > 0$. Also hat f an der Stelle $x = 1/e$ ein Minimum. Der Funktionswert ist $f(1/e) = e^{-1/e}$.

$g'(x) = 0$ liefert

$$2x \cos \frac{1}{x^2+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{x^2+1} = \frac{2n+1}{2} \pi, \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

Die letztere Gleichung vereinfacht sich zu

$$x^2 = \frac{2}{(2n+1)\pi} - 1,$$

was keine reellen Lösungen besitzt. Da auch 0 nicht im Definitionsbereich von g liegt, hat g keine lokalen Extrema.

Aufgabe 2

Seien $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar. Zeigen Sie die folgenden Gleichungen:

$$(a) \quad \frac{d^n}{dx^n} [f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

$$(b) \quad f(x) \frac{d^n g(x)}{dx^n} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} [f^{(k)}(x)g(x)]$$

Lösung. (a) Wir beweisen die Gleichung per Induktion nach n . Für $n = 0$ gilt wie gewünscht

$$f(x)g(x) = \binom{0}{0} f^{(0)}(x)g^{(0)}(x).$$

Für $n + 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[f(x)g(x)] &= \frac{d}{dx} \left[\frac{d^n}{dx^n} [f(x)g(x)] \right] \\ &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [f^{(n-k+1)}(x)g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x)g^{(k+1)}(x)] \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k+1)}(x)g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n-(k-1))}(x)g^{(k)}(x) \\ &= f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x) \\ &= f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x). \end{aligned}$$

(b) Wir beweisen die Gleichung per Induktion nach n . Für $n = 0$ gilt wie gewünscht

$$f(x)g(x) = (-1)^0 \binom{0}{0} [f^{(0)}(x)g(x)].$$

Für $n + 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) \frac{d^{n+1}g(x)}{dx^{n+1}} &= f(x) \frac{d}{dx} \frac{d^n g(x)}{dx^n} \\ &= \frac{d}{dx} \left[f(x) \frac{d^n g(x)}{dx^n} \right] - f'(x) \frac{d^n g(x)}{dx^n} \\ &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} [f^{(k)}(x)g(x)] - \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} [f^{(k+1)}(x)g(x)] \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{d^{n-k+1}}{dx^{n-k+1}} [f^{(k)}(x)g(x)] - \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \binom{n}{k-1} \frac{d^{n-k+1}}{dx^{n-k+1}} [f^{(k)}(x)g(x)] \\ &= \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [f^{(0)}(x)g(x)] + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{d^{n+1-k}}{dx^{n+1-k}} [f^{(k)}(x)g(x)] \\ &\quad + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k-1} \frac{d^{n+1-k}}{dx^{n+1-k}} [f^{(k)}(x)g(x)] + (-1)^{n+1} f^{(n+1)}(x)g(x) \\ &= \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [f^{(0)}(x)g(x)] + \sum_{k=1}^n (-1)^k \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] \frac{d^{n+1-k}}{dx^{n+1-k}} [f^{(k)}(x)g(x)] \\ &\quad + (-1)^{n+1} f^{(n+1)}(x)g(x) \\ &= \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [f^{(0)}(x)g(x)] + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n+1}{k} \frac{d^{n+1-k}}{dx^{n+1-k}} [f^{(k)}(x)g(x)] + (-1)^{n+1} f^{(n+1)}(x)g(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \frac{d^{n+1-k}}{dx^{n+1-k}} [f^{(k)}(x)g(x)]. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, daß folgende Ungleichung für alle $x > 0$ gilt:

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}.$$

Lösung. Wenden wir den Mittelwertsatz auf die Funktion $g(t) = \sqrt{1+t}$ und das Intervall $[0, x]$ an, so erhalten wir ein $\xi \in (0, x)$ mit

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x - 0} = \frac{1}{2\sqrt{1+\xi}} < \frac{1}{2}.$$

Hieraus folgt die Ungleichung.

Hausaufgaben

Aufgabe 4

Zeigen Sie, daß die folgenden Funktionen in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind und berechnen Sie ihre Ableitungen. Ist g' im Punkt $x = 0$ stetig?

(a) $f(x) = x^2 e^{\sin(x)}$

(b) $g(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 5

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, daß folgende Ungleichungen für alle $x \in (0, \pi/2)$ gelten:

(a) $x \cos(x) < \sin(x)$

(b) $\tan(x) > x + \frac{x^3}{3}$