Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I
Übung 13

Aufgabe 1

Wir betrachten die Funktionen $f, g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^x \quad \text{und} \quad g(x) = \sin\left(\tfrac{1}{x^2+1}\right).$$

(a) Berechnen Sie die Ableitungen f' und g'.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f und g.

Lösung. (a) Wegen $f(x) = x^x = e^{x\log(x)}$ erhalten wir

$$f'(x) = e^{x\log(x)}\left(\log x + x\frac{1}{x}\right) = (\log x + 1)e^{x\log(x)}.$$

Für g erhalten wir

$$g'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}\cos\frac{1}{x^2+1}.$$

(b) Die Gleichung $f'(x) = 0$ liefert

$$\log x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \log x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{e}.$$

Wegen

$$f''(x) = (\log x + 1)^2 e^{x\log(x)} + x^{-1}e^{x\log(x)}$$

ist $f''(1/e) = 0 + e \cdot e^{-1/e} = e^{1-1/e} > 0$. Also hat f an der Stelle $x = 1/e$ ein Minimum. Der Funktionswert ist $f(1/e) = e^{-1/e}$.

$g'(x) = 0$ liefert

$$2x\cos\frac{1}{x^2+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ oder } \frac{1}{x^2+1} = \frac{2n+1}{2}\pi, \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

Die letztere Gleichung vereinfacht sich zu

$$x^2 = \frac{2}{(2n+1)\pi} - 1,$$

was keine reellen Lösungen besitzt. Da auch 0 nicht im Definitionsbereich von g liegt, hat g keine lokalen Extrema.

Aufgabe 2

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Zeigen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $\displaystyle \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$

(b) $\displaystyle f(x)\frac{\mathrm{d}^n g(x)}{\mathrm{d}x^n} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}[f^{(k)}(x)g(x)]$

Lösung. (a) Wir beweisen die Gleichung per Induktion nach n. Für $n = 0$ gilt wie gewünscht

$$f(x)g(x) = \binom{0}{0} f^{(0)}(x)g^{(0)}(x)\,.$$

Für $n+1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}[f(x)g(x)] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[f(x)g(x)]\right] \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[f^{(n-k+1)}(x)g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x)g^{(k+1)}(x)] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k+1)}(x)g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1} f^{(n-(k-1))}(x)g^{(k)}(x) \\
&= f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x) \\
&= f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x)\,.
\end{aligned}$$

(b) Wir beweisen die Gleichung per Induktion nach n. Für $n = 0$ gilt wie gewünscht

$$f(x)g(x) = (-1)^0\binom{0}{0}[f^{(0)}(x)g(x)]\,.$$

Für $n+1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(x)\frac{\mathrm{d}^{n+1}g(x)}{\mathrm{d}x^{n+1}} &= f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^n g(x)}{\mathrm{d}x^n} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)\frac{\mathrm{d}^n g(x)}{\mathrm{d}x^n}\right] - f'(x)\frac{\mathrm{d}^n g(x)}{\mathrm{d}x^n} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}[f^{(k)}(x)g(x)] - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}[f^{(k+1)}(x)g(x)] \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^{n-k+1}}{\mathrm{d}x^{n-k+1}}[f^{(k)}(x)g(x)] - \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{n}{k-1}\frac{\mathrm{d}^{n-k+1}}{\mathrm{d}x^{n-k+1}}[f^{(k)}(x)g(x)] \\
&= \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}[f^{(0)}(x)g(x)] + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^{n+1-k}}{\mathrm{d}x^{n+1-k}}[f^{(k)}(x)g(x)] \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k-1}\frac{\mathrm{d}^{n+1-k}}{\mathrm{d}x^{n+1-k}}[f^{(k)}(x)g(x)] + (-1)^{n+1}f^{(n+1)}(x)g(x) \\
&= \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}[f^{(0)}(x)g(x)] + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]\frac{\mathrm{d}^{n+1-k}}{\mathrm{d}x^{n+1-k}}[f^{(k)}(x)g(x)] \\
&\quad + (-1)^{n+1}f^{(n+1)}(x)g(x) \\
&= \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}[f^{(0)}(x)g(x)] + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k}\frac{\mathrm{d}^{n+1-k}}{\mathrm{d}x^{n+1-k}}[f^{(k)}(x)g(x)] + (-1)^{n+1}f^{(n+1)}(x)g(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}\frac{\mathrm{d}^{n+1-k}}{\mathrm{d}x^{n+1-k}}[f^{(k)}(x)g(x)]\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, daß folgende Ungleichung für alle $x > 0$ gilt:

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}\,.$$

Lösung. Wenden wir den Mittelwertsatz auf die Funktion $g(t) = \sqrt{1+t}$ und das Intervall $[0, x]$ an, so erhalten wir ein $\xi \in (0, x)$ mit

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x-0} = \frac{1}{2\sqrt{1+\xi}} < \frac{1}{2}\,.$$

Hieraus folgt die Ungleichung.

Hausaufgaben

Aufgabe 4

Zeigen Sie, daß die folgenden Funktionen in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind und berechnen Sie ihre Ableitungen. Ist g' im Punkt $x = 0$ stetig?

(a) $f(x) = x^2 e^{\sin(x)}$

(b) $g(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } x = 0\,. \end{cases}$

Lösung. (a) Mit Produkt- und Kettenregel erhalten wir

$$f'(x) = 2xe^{\sin(x)} + x^2\cos(x)e^{\sin(x)}\,.$$

(b) Für $x \neq 0$ folgt mit Produkt- und Kettenregel, daß g in x differenzierbar ist und

$$g'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Wegen

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

ist g in $x = 0$ ebenfalls differenzierbar und $g'(0) = 0$.

g' ist in 0 nicht stetig. Die Folge $(x_n)_{n>0}$ mit $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ konvergiert gegen 0, aber

$$g'(x_n) = \frac{1}{\pi n}\sin(2\pi n) - \cos(2\pi n) = -1$$

konvergiert nicht gegen $g'(0) = 0$.

Aufgabe 5

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, daß folgende Ungleichungen für alle $x \in (0, \pi/2)$ gelten:

(a) $x\cos(x) < \sin(x)$

(b) $\tan(x) > x + \dfrac{x^3}{3}$

Lösung. (a) Wir wenden den Mittelwertsatzes auf die Funktion $f(t) = \sin(t)$ im Intervall $[0, x]$ an und erhalten einen Punkt $\xi \in (0, x)$ mit

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = \cos(\xi)\,.$$

Wegen $x < \frac{\pi}{2}$ ist cos streng monoton fallend auf $[0, x]$. Also ist $\cos(\xi) > \cos(x)$ und

$$x \cos(x) < x \cos(\xi) = \sin x .$$

(b) Sei $x \in (0, \pi/2)$ und sei $f : [0, x] \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $f(t) = \tan(t) - t - \frac{t^3}{3}$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in (0, x)$ mit

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = \frac{1}{\cos(\xi)^2} - 1 - \xi^2 .$$

Nach (a) gilt $\xi \cos(\xi) < \sin(\xi)$. Wegen $\xi > 0$ und $\cos(\xi) > 0$ folgt somit $\xi^2 < \tan(\xi)^2$. Somit erhalten wir

$$\frac{f(x)}{x} > \frac{1}{\cos(\xi)^2} - 1 - \tan(\xi)^2 = \frac{1 - \cos(\xi)^2 - \sin(\xi)^2}{\cos(\xi)^2} = 0 .$$

Wie gewünscht gilt also $f(x) > 0$.