Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

22.01.2010

12. Übung Analysis I
Wintersemester 2009/2010

(G12.1)

Man berechne die exakten Werte von $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ an den Stellen $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$.

Lösung.

(i) Wir behandeln zuerst den Fall $x = \frac{\pi}{4}$. Aus

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

folgt

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}.$$

Weiter gilt

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

also

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Da der Cosinus im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}[$ positiv ist, folgt

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$$

und

$$\tan\frac{\pi}{4} = 1.$$

(ii) Für den Fall $x = \frac{\pi}{3}$ setzen wir $z := e^{i\pi/3}$. Es gilt $z^3 = -1$, und wir erhalten

$$0 = z^3 + 1 = (z+1)(z^2 - z + 1).$$

Da $z \neq -1$ folgt $z^2 - z + 1 = 0$, also

$$z + \frac{1}{z} = 1.$$

Da aber

$$z + \frac{1}{z} = e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3} = 2\cos\frac{\pi}{3},$$

erhalten wir

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

und

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

(iii) Es gilt

$$\sin\frac{\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

und

$$\cos\frac{\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

und daher

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

■

(G12.2)

(i) Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \sqrt{x}$. Zeigen Sie, dass f in allen Punkten $a \in \mathbb{R}_+^*$ differenzierbar ist, dass aber f in $a = 0$ nicht differenzierbar ist. Verwenden Sie hierzu nur die Definition und nicht die Regel (15.17). Bestimmen Sie $f'(a)$ für $a \in \mathbb{R}_+^*$.

(ii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$. Sei weiter $a \in \mathbb{R}$. Man bestimme $f'(a)$ und $g'(a)$ ohne die Regel

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

zu benutzen, und man bestimme Funktionen $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \phi(x)$$

und

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \psi(x),$$

und so dass

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{\phi(x)}{x-a} = 0, \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{\psi(x)}{x-a} = 0.$$

Lösung.

(i) Sei $a \in \mathbb{R}_+^*$. Für $x \in \mathbb{R}_+$ mit $x \neq a$, gilt

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.$$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}_+$, so dass $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und $x_n \neq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Also ist f differenzierbar in a und es gilt

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Wir werden jetzt zeigen, dass f in 0 nicht differenzierbar ist. Es gilt

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}_+^*$, mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Die Folge $(1/\sqrt{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht beschränkt und somit divergent. Also existiert der Grenzwert

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

nicht und somit ist f nicht differenzierbar in 0.

(ii) (a) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $h := x - a$. Es gilt

$$f(x) = f(a + h) = a^2 + 2ah + h^2 = f(a) + 2a \cdot (x - a) + h^2.$$

Setzen wir $\phi(x) := h^2 = (x - a)^2$, so gilt

$$f(x) = f(a) + 2a \cdot (x - a) + \phi(x)$$

und

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{\phi(x)}{x - a} = \lim_{x\to a}(x - a) = 0.$$

Aus § 15 Satz 1 folgt $f'(a) = 2a$.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $h := x - a$. Es gilt

$$g(x) = g(a + h) = a^3 + 3a^2h + 3h^2a + h^3 = g(a) + 3a^2 \cdot h + (3h^2a + h^3).$$

Setzen wir $\psi(x) := 3h^2a + h^3 = 3(x - a)^2a + (x - a)^3$, so gilt

$$g(x) = g(a) + 3a^2 \cdot (x - a) + \psi(x)$$

und

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{\psi(x)}{x - a} = \lim_{x\to a}(3(x - a)a + (x - a)^2) = 0.$$

Aus § 15 Satz 1 folgt $g'(a) = 3a^2$.

■

(G12.3)

Sei $a < b \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in $[a, b]$ und für alle $x \in [a, b]$ gelte

$$|f(x)| + |f'(x)| \neq 0.$$

Beweisen Sie, dass f in $[a, b]$ nur endlich viele Nullstellen hat.

Lösung.

Es sei N_f die Menge der Nullstellen von f in $[a, b]$. Wir nehmen an, N_f sei unendlich. Dann gibt es eine Teilmenge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ von N_f mit paarweise verschiedenen Zahlen x_n. Da das Intervall $[a, b]$ kompakt ist, hat die Folge (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}), etwa $x_{n_k} \to c \in [a, b]$. Da die x_n paarweise verschieden sind, kann $x_{n_k} = c$ für höchstens ein $k \in \mathbb{N}$ gelten. Aus $f(x_n) = 0$ und der Stetigkeit von f folgt auch $f(c) = 0$. Da f differenzierbar ist, folgt

$$f'(c) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x_{n_k}) - f(c)}{x_{n_k} - c} = 0.$$

Das ist aber ein Widerspruch zu $|f(c)| + |f'(c)| \neq 0$.

■

Hausaufgaben

(H12.4)

(i) Berechnen Sie $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{517}$.

(ii) Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

Lösung.

(i) Es gilt

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{517} = \left(e^{i\pi/4}\right)^{517} = e^{i517\pi/4} = e^{i128\pi + i5\pi/4} = e^{i5\pi/4} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right).$$

(ii) Es gilt

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{2} - \sin x \sin\frac{\pi}{2}.$$

Da $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ ist, erhalten wir

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

■

(H12.5)

(i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$. Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist, und berechnen Sie $f'(x)$.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}. \tag{1}$$

(iii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1 + \sin x$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) > 0$.

(b) Aus dem Ergebnis aus (a) werden wir später schließen können, dass f streng monoton wachsend ist. Sei das jetzt vorausgesetzt.

Zeigen Sie, dass f eine differenzierbare Umkehrfunktion g hat, und berechnen Sie $g'(1)$.

Lösung.

(i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Also ist f differenzierbar und es gilt $f'(x) = 0$.

(ii) Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Durch Ableiten nach x auf beiden Seiten erhalten wir (1).

(iii) (a) Es gilt $f'(x) = 2 + \cos x$, und da $|\cos x| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, folgt $f'(x) > 0$.

(b) Aus § 12 Satz 1 folgt, dass f eine stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion $g : J \to \mathbb{R}$ besitzt, wobei $J := f(\mathbb{R})$ ist. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) \neq 0$, und somit folgt aus § 15 Satz 3, dass g differenzierbar ist und dass für $y \in J$ gilt

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Da $f(0) = 1$ ist $g(1) = 0$ und wir erhalten

$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{2 + \cos 0} = \frac{1}{3}.$$

■