Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I
Übung 11

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ folgender Gleichungen:

(a) $\dfrac{z}{1-i} + \dfrac{8+i}{i-2} = \dfrac{1}{2}\overline{z} - 3 - 2i$

(b) $4z + \dfrac{52}{z} = 24 \quad$ für $z \neq 0$

(c) $z^2 - (3+5i)z - 16 + 4i = 0$

Lösung. (a) Wegen

$$\frac{1}{2}\overline{z} - 3 - 2i = \frac{z}{1-i} + \frac{8+i}{i-2} = \frac{z(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \frac{(8+i)(i+2)}{(i-2)(i+2)} = \frac{z+iz}{1+1} + \frac{15+10i}{-1-4} = \frac{1}{2}(z+iz) - 3 - 2i$$

folgt $z + iz = \overline{z}$. Für $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ wird hieraus

$$a + ib + ia - b = a - ib\,.$$

Indem wir Real- und Imaginärteil getrennt betrachten, erhalten wir $a - b = a$ und $ib + ia = -ib$. Also ist $b = a = 0$ und $z = 0$.

(b) Wegen $z \neq 0$ können wir die Gleichung mit z multiplizieren. Wir erhalten die quadratische Gleichung

$$4z^2 - 24z + 52 = 0 \quad \text{bzw.} \quad z^2 - 6z + 13 = 0\,.$$

Die Lösungsformel liefert

$$z = 3 \pm \sqrt{3^2 - 13} = 3 \pm \sqrt{-4} = 3 \pm 2i\,.$$

(c) Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert:

$$z = \frac{3+5i}{2} \pm \sqrt{\frac{(3+5i)^2}{4} + 16 - 4i} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i \pm \sqrt{\frac{9 + 30i - 25 + 64 - 16i}{4}} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i \pm \sqrt{12 + \frac{7}{2}i}$$

Um die Wurzel auszurechnen, machen wir den Ansatz

$$(x + yi)^2 = 12 + \frac{7}{2}i\,.$$

Dies liefert

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 12 + \frac{7}{2}i\,.$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$x^2 - y^2 = 12 \quad \text{und} \quad 2xy = \frac{7}{2}\,.$$

Außerdem haben wir

$$x^2 + y^2 = |(x+yi)^2| = \left|12 + \frac{7}{2}i\right| = \sqrt{144 + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{625}{4}} = \frac{25}{2}.$$

Durch Addition erhalten wir

$$2x^2 = (x^2+y^2) + (x^2-y^2) = \frac{25}{2} + 12 = \frac{49}{2}.$$

Also $x = \frac{7}{2}$ und $y = \frac{7}{4x} = \frac{1}{2}$. Somit folgt

$$z = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i \pm \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i\right),$$

d. h. $z = 5 + 3i$ oder $z = -2 + 2i$.

Aufgabe 2

Für $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos x \neq 0$ setzen wir

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ Zahlen, so daß $\tan x$, $\tan y$ und $\tan(x+y)$ definiert sind. Zeigen Sie, daß

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}.$$

Lösung. Einsetzen der Definition und Anwendung der Additionstheoreme liefert

$$\begin{aligned}\tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\cos x \cos y \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}\right)}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} \\ &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Wir betrachten die Funktionen $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Graphen von f und g.

(b) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ und $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$, sofern sie existieren.

(c) Ist f oder g stetig in 0?

Lösung. (b) Der erste Grenzwert existiert nicht. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := \frac{2}{\pi n}$ konvergiert gegen 0, aber

$$\sin \frac{1}{x_n} = \sin \frac{\pi}{2} n = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } n, \\ 1 & \text{für } n = 4k+1,\ k \in \mathbb{Z}, \\ -1 & \text{für } n = 4k+3,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

konvergiert nicht.

Der zweite Grenzwert existiert. Für $x \neq 0$ ist

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \cdot 1 = |x| .$$

Also ist

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = 0 .$$

(c) Die Funktion f ist nicht in 0 stetig, da die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus (b) gegen 0 konvergiert, aber $f(x_n)$ nicht gegen $f(0)$ konvergiert.

Für g sehen wir mit (b), daß

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = g(0) .$$

Also ist g in 0 stetig.