Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

Analysis I
Übung 11

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ folgender Gleichungen:

(a) $\dfrac{z}{1-i} + \dfrac{8+i}{i-2} = \dfrac{1}{2}\overline{z} - 3 - 2i$

(b) $4z + \dfrac{52}{z} = 24 \quad \text{für } z \neq 0$

(c) $z^2 - (3+5i)z - 16 + 4i = 0$

Lösung. (a) Wegen

$$\frac{1}{2}\overline{z} - 3 - 2i = \frac{z}{1-i} + \frac{8+i}{i-2} = \frac{z(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \frac{(8+i)(i+2)}{(i-2)(i+2)} = \frac{z+iz}{1+1} + \frac{15+10i}{-1-4} = \frac{1}{2}(z+iz) - 3 - 2i$$

folgt $z + iz = \overline{z}$. Für $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ wird hieraus

$$a + ib + ia - b = a - ib\,.$$

Indem wir Real- und Imaginärteil getrennt betrachten, erhalten wir $a - b = a$ und $ib + ia = -ib$. Also ist $b = a = 0$ und $z = 0$.

(b) Wegen $z \neq 0$ können wir die Gleichung mit z multiplizieren. Wir erhalten die quadratische Gleichung

$$4z^2 - 24z + 52 = 0 \quad \text{bzw.} \quad z^2 - 6z + 13 = 0\,.$$

Die Lösungsformel liefert

$$z = 3 \pm \sqrt{3^2 - 13} = 3 \pm \sqrt{-4} = 3 \pm 2i\,.$$

(c) Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert:

$$z = \frac{3+5i}{2} \pm \sqrt{\frac{(3+5i)^2}{4} + 16 - 4i} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i \pm \sqrt{\frac{9+30i-25+64-16i}{4}} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i \pm \sqrt{12 + \frac{7}{2}i}$$

Um die Wurzel auszurechnen, machen wir den Ansatz

$$(x + yi)^2 = 12 + \frac{7}{2}i\,.$$

Dies liefert

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 12 + \frac{7}{2}i\,.$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$x^2 - y^2 = 12 \quad \text{und} \quad 2xy = \frac{7}{2}\,.$$

Außerdem haben wir

$$x^2 + y^2 = |(x + yi)^2| = \left|12 + \frac{7}{2}i\right| = \sqrt{144 + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{625}{4}} = \frac{25}{2}\,.$$

Durch Addition erhalten wir

$$2x^2 = (x^2 + y^2) + (x^2 - y^2) = \frac{25}{2} + 12 = \frac{49}{2}\,.$$

Also $x = \frac{7}{2}$ und $y = \frac{7}{4x} = \frac{1}{2}$. Somit folgt

$$z = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i \pm \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i\right),$$

d. h. $z = 5 + 3i$ oder $z = -2 + 2i$.

Aufgabe 2

Für $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos x \neq 0$ setzen wir

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}\,.$$

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ Zahlen, so daß $\tan x$, $\tan y$ und $\tan(x + y)$ definiert sind. Zeigen Sie, daß

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}\,.$$

Lösung. Einsetzen der Definition und Anwendung der Additionstheoreme liefert

$$\begin{aligned}\tan(x + y) &= \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\cos x \cos y \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}\right)}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} \\ &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Wir betrachten die Funktionen $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } x = 0\,, \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } x = 0\,. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Graphen von f und g.

(b) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ und $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$, sofern sie existieren.

(c) Ist f oder g stetig in 0?

Lösung. (b) Der erste Grenzwert existiert nicht. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n := \frac{2}{\pi n}$ konvergiert gegen 0, aber

$$\sin \frac{1}{x_n} = \sin \frac{\pi}{2} n = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } n\,, \\ 1 & \text{für } n = 4k + 1\,,\ k \in \mathbb{Z}\,, \\ -1 & \text{für } n = 4k + 3\,,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

konvergiert nicht.

Der zweite Grenzwert existiert. Für $x \neq 0$ ist

$$\left|x \sin \frac{1}{x}\right| = |x| \cdot \left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq |x| \cdot 1 = |x| .$$

Also ist

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \left|x \sin \frac{1}{x}\right| = 0 .$$

(c) Die Funktion f ist nicht in 0 stetig, da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (b) gegen 0 konvergiert, aber $f(x_n)$ nicht gegen $f(0)$ konvergiert.

Für g sehen wir mit (b), daß

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = g(0) .$$

Also ist g in 0 stetig.

Hausaufgaben

Aufgabe 4

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende, stetige Funktion mit Bild $B := f(D)$.

(a) Zeigen Sie folgende Aussage:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in D)[x + \varepsilon \leq y \to f(x) + \delta \leq f(y)] .$$

(b) Zeigen Sie, daß die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to D$ stetig ist.

Lösung. (a) Angenommen, die Aussage stimmt nicht. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß wir zu jedem $\delta > 0$ Elemente x, y finden können mit

$$x + \varepsilon \leq y \quad \text{und} \quad f(x) + \delta > f(y) .$$

Seien x_n und y_n solche Elemente für $\delta := \frac{1}{n}$. Da D beschränkt ist, gibt es nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Wenden wir den Satz von Bolzano-Weierstraß auf die Folge $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ an, so erhalten wir eine konvergente Teilfolge $(y_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Da $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge der konvergenten Folge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist, konvergiert sie ebenfalls. Sei

$$x := \lim_{k\to\infty} x_{m_k} \quad \text{und} \quad y := \lim_{k\to\infty} y_{m_k} .$$

Wegen $x_{m_k} + \varepsilon \leq y_{m_k}$ gilt $x + \varepsilon \leq y$.

Sind $x, y \in D$, so argumentieren wir folgendermaßen: Aus

$$f(x_{m_k}) + \frac{1}{m_k} > f(y_{m_k})$$

und der Stetigkeit von f folgt $f(x) + 0 \geq f(y)$, was der strengen Monotonie von f widerspricht.

Falls $x \notin D$ oder $y \notin D$ ist, so erweitern wir f stetig auf das Intervall $D \cup \{x, y\}$ und verwenden dann die Argumentation von oben. Zunächst zeigen wir, daß f auf dem Intervall $D \cap [x, y]$ beschränkt ist. Wegen der strengen Monotonie von f folgt dann, daß

$$\lim_{z\to x} f(z) \quad \text{und} \quad \lim_{z\to y} f(z)$$

existieren, so daß wir diese Werte für $f(x)$ und $f(y)$ verwenden können.

Ist $x \in D$, so folgt aus der Monotonie von f, daß $f(x) \leq f(z)$ für alle $z \in D \cap [x, y]$. Also ist f von unten durch $f(x)$ beschränkt.

Angenommen $x \notin D$. Für jedes $z \in D \cap (x, y]$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x < x_{m_k} < z$. Es folgt, daß

$$f(z) > f(x_{m_k}) > f(y_{m_k}) - \frac{1}{m_k} \geq f(x + \varepsilon) - 1 .$$

Also ist f von unten durch $f(x + \varepsilon) - 1$ beschränkt. Analog folgt, daß f von oben beschränkt ist.

(b) Wir wenden das ε-δ-Kriterium an. Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in B$. Wir müssen ein $\delta > 0$ finden, so daß für alle $y \in B$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| < \varepsilon$. Nach (a) gibt es ein $\delta > 0$, so daß für $u, v \in D$ gilt

$$u + \varepsilon \leq v \Rightarrow f(u) + \delta \leq f(v) .$$

Wir behaupten, daß dieses δ die gewünschten Eigenschaften hat. Sei $y \in B$ mit $|x - y| < \delta$. Wir setzen $a := f^{-1}(x)$ und $b := f^{-1}(y)$. Dann ist

$$|f(a) - f(b)| = |x - y| < \delta .$$

Insbesondere gilt

$$f(a) + \delta \nleq f(b) \quad \text{und} \quad f(b) + \delta \nleq f(a) .$$

Nach Wahl von δ folgt hieraus

$$a + \varepsilon \nleq b \quad \text{und} \quad b + \varepsilon \nleq a .$$

Also ist $|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| = |a - b| < \varepsilon$.

Aufgabe 5

Welche der folgenden Reihen konvergieren?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)} \cdot \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$

Lösung. (a) Wir spalten die Reihe in Real- und Imaginärteil auf:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n)$$

mit

$$a_n := \begin{cases} \frac{(-1)^k}{2k} & \text{für } n = 2k , \\ 0 & \text{sonst} , \end{cases} \quad \text{und} \quad b_n := \begin{cases} \frac{(-1)^k}{2k+1} & \text{für } n = 2k + 1 , \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

Für den Realteil erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(0 + \frac{(-1)^{k+1}}{2k+2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+2} .$$

(diese Umformung ist erlaubt, da es sich um eine begrenzte Umordnung der Reihe handelt (siehe Aufgabe (G7.2) auf Übungsblatt 7)) Nach dem Leibnitzschen Kriterium konvergiert diese Reihe.

Analog erhalten wir für den Imaginärteil

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{2k+1} + 0\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} .$$

Dies konvergiert ebenfalls nach dem Leibnitzschen Kriterium.

Da Real- und Imaginärteil der Reihe konvergieren, konvergiert auch die gesamte Reihe.

(b) Wegen

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n = \left(\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}\right)^n = \left(\frac{1-2i-1}{1+1}\right)^n = (-i)^n$$

ist die Folge der Partialsummen $1, 1-i, -i, 0, 1, 1-i, -i, 0, \dots$ periodisch mit Periode 4. Somit divergiert diese Reihe.

(c) Wir betrachten wieder Real- und Imaginärteil getrennt:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)} \cdot \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n}{\log(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + ib_n)$$

mit

$$a_n := \begin{cases} \frac{(-1)^k}{\log(2k)} & \text{für } n = 2k\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases} \quad \text{und} \quad b_n := \begin{cases} \frac{(-1)^{k+1}}{\log(2k+1)} & \text{für } n = 2k+1\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Für Real- und Imaginärteil erhalten wir

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{\log(2k)} + 0\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\log(2k)}\,,$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(0 + \frac{(-1)^{k+1}}{\log(2k+1)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\log(2k+1)}\,.$$

Somit können wir wieder das Leibnitzsche Kriterium anwenden, um zu zeigen, daß die Reihe konvergiert.