

18.12.2009

10. Übung Analysis I Wintersemester 2009/2010

(G10.1) (Minitest. Bearbeitungszeit nicht mehr als 5 Minuten.)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Sei $D =]0, 1[$.

- (i) Es existiert eine stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(D) = \mathbb{R}$.
- (ii) Es existiert eine stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(D) =]0, 1[$.
- (iii) Es existiert eine stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(D) = [0, 1] \cup [2, 3]$.

Lösung.

- (i) Falsch. Aus § 11 Satz 2 folgt, dass $f(D)$ beschränkt ist.
- (ii) Falsch. Aus § 11 Satz 2 folgt, dass jede auf $[0, 1]$ stetige Funktion ihr Maximum und ihr Minimum erreicht.
- (iii) Falsch. Aus dem Zwischenwertsatz (§ 11 Satz 1) folgt, dass $f(D)$ ein Intervall ist. (Vgl. § 11 Corollar 2.)

■

(G10.2)

Eine auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig* mit Lipschitz-Konstante $L > 0$, falls

$$(\forall x, y \in D) (|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|). \quad (1)$$

- (i) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie die folgende Implikationskette:

$$f \text{ Lipschitz-stetig} \Rightarrow f \text{ gleichmäßig stetig} \Rightarrow f \text{ stetig.}$$

- (ii) Es sei

$$f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Zeigen Sie, dass f stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

- (iii) Es sei

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

Zeigen Sie, dass g gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

Lösung.

- (i) Nach der Bemerkung vor § 11 Satz 4 ist jede gleichmäßig stetige Funktion stetig. Wir beweisen also noch, dass Lipschitz-Stetigkeit die gleichmäßige Stetigkeit impliziert. Es sei also f eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante $L > 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben und $\delta := \varepsilon/L$. Ist dann $x, y \in D$ und $|x - y| < \delta$, so haben wir

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\delta = \varepsilon.$$

Also ist f gleichmäßig stetig.

- (ii) Die Funktion f ist als Verkettung stetiger Funktionen stetig (man beachte, dass Null nicht im Definitionsbereich liegt). Um zu zeigen, dass f nicht gleichmäßig stetig ist, wählen wir $\varepsilon = 3$ und zeigen, dass für jedes $\delta > 0$ Zahlen $x, y \in]0, 1[$ existieren, für die $|x - y| < \delta$ aber $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$ gilt. Sei also ein beliebiges $\delta > 0$ gegeben. Wir wählen dazu nun $0 < x < \min(1, \delta)$ und setzen $y = x/2$. Dann gilt $x, y \in]0, 1[$,

$$|x - y| = \frac{x}{2} < \delta$$

und

$$|f(x) - f(y)| = \frac{3}{x^2} > 3 = \varepsilon.$$

- (iii) Aus § 12 Satz 2 folgt, dass g stetig ist. Da $[0, 1]$ kompakt ist, folgt aus § 11 Satz 4 dass g gleichmäßig stetig ist.

Wir müssen noch zeigen, dass g nicht Lipschitz-stetig ist. Um einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an, dass g Lipschitz-stetig ist. Dann gibt es eine Konstante $L > 0$, so dass

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$$

für alle $x, y \in [0, 1]$ gilt. Als Gegenbeispiel wählen wir $y = 0$ und $x_n = 1/n^2$. Dann gilt

$$|g(x) - g(y)| = \frac{1}{n} \leq L \frac{1}{n^2}.$$

Also folgt $n \leq L$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was einen Widerspruch liefert. Also ist g nicht Lipschitz-stetig.

■

(G10.3)

Sei $a < b \in \mathbb{R}$. Man beweise: Eine stetige Funktion $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn sie sich stetig auf das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ fortsetzen lässt.

Lösung.

⇐: Sei $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\tilde{f}(x) = f(x)$ für $x \in [a, b[$. Nach § 11 Satz 4 ist \tilde{f} gleichmäßig stetig, also ist auch f gleichmäßig stetig.

⇒: Sei $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Wir zeigen zunächst, dass f beschränkt ist. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(y)| < 1$$

für alle $x, y \in [a, b[$ mit $|x - y| < \delta$. Sei $x' := \max(a, b - \delta)$. Dann gilt für alle x mit $x \in [x', b[$

$$|f(x) - f(x')| < 1, \quad \text{also} \quad |f(x)| < 1 + |f(x')|,$$

d.h. f ist beschränkt auf $[x', b[$ und auch auf dem kompakten Intervall $[a, x']$, also auf ganz $[a, b[$.

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $[a, b[$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$. Da die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine Teilfolge $(f(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$, die gegen eine reelle Zahl c konvergiert. Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichnen wir die Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ wieder mit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wir haben also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c.$$

Wir zeigen jetzt, dass für jede Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[a, b[$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ ebenfalls $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = c$ gilt. Dann können wir durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in [a, b[, \\ c & \text{falls } x = b \end{cases}$$

eine stetige Funktion $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definieren.

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(x_n) - c| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq N_1.$$

Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es außerdem ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $x, y \in [a, b[$ mit $|x - y| < \delta$. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ gibt es ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - b| < \delta \quad \text{und} \quad |y_n - b| < \delta \quad \text{für alle } n \geq N_2.$$

Für $n \geq N := \max(N_1, N_2)$ folgt dann wegen $|x_n - y_n| < \delta$

$$|f(y_n) - c| \leq |f(y_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Es folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = c$.

■

Hausaufgaben

(H10.4)

Sei $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 2x^4 + 16x - 32 + \sqrt{|x|}$.

- (i) Ist f beschränkt? Ist f stetig?
- (ii) Besitzt f ein Maximum und/oder ein Minimum?
- (iii) Zeigen Sie, dass f mindestens eine Nullstelle besitzt.
- (iv) Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = -1$ mindestens eine Lösung besitzt.

Lösung.

■

(H10.5)

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(0) = 1$ und es gelte $f(x + y) \leq f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist f in 0 stetig, so ist f auf ganz \mathbb{R} stetig.

Lösung.

■