Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

18.12.2009

10. Übung Analysis I
Wintersemester 2009/2010

(G10.1) (Minitest. Bearbeidungszeit nicht mehr als 5 Minuten.)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Sei $D = [0, 1]$.

(i) Es existiert eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(D) = \mathbb{R}$.

(ii) Es existiert eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(D) =]0, 1[$.

(iii) Es existiert eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(D) = [0, 1] \cup [2, 3]$.

Lösung.

(i) Falsch. Aus § 11 Satz 2 folgt, dass $f(D)$ beschränkt ist.

(ii) Falsch. Aus § 11 Satz 2 folgt, dass jede auf $[0, 1]$ stetige Funktion ihr Maximum und ihr Minimum erreicht.

(iii) Falsch. Aus dem Zwischenwertsatz (§ 11 Satz 1) folgt, dass $f(D)$ ein Intervall ist. (Vgl. § 11 Corollar 2.)

■

(G10.2)

Eine auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig* mit Lipschitz-Konstante $L > 0$, falls

$$(\forall x, y \in D)\Big(|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|\Big). \tag{1}$$

(i) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie die folgende Implikationskette:

$$f \text{ Lipschitz-stetig} \quad \Rightarrow \quad f \text{ gleichmäßig stetig} \quad \Rightarrow \quad f \text{ stetig.}$$

(ii) Es sei

$$f :]0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Zeigen Sie, dass f stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

(iii) Es sei

$$g : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

Zeigen Sie, dass g gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

Lösung.

(i) Nach der Bemerkung vor § 11 Satz 4 ist jede gleichmäßig stetige Funktion stetig. Wir beweisen also noch, dass Lipschitz-Stetigkeit die gleichmäßige Stetigkeit impliziert. Es sei also f eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante $L > 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben und $\delta := \varepsilon/L$. Ist dann $x, y \in D$ und $|x - y| < \delta$, so haben wir

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\delta = \varepsilon.$$

Also ist f gleichmäßig stetig.

(ii) Die Funktion f ist als Verkettung stetiger Funktionen stetig (man beachte, dass Null nicht im Definitionsbereich liegt). Um zu zeigen, dass f nicht gleichmäßig stetig ist, wählen wir $\varepsilon = 3$ und zeigen, dass für jedes $\delta > 0$ Zahlen $x, y \in]0, 1]$ existieren, für die $|x - y| < \delta$ aber $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$ gilt. Sei also ein beliebiges $\delta > 0$ gegeben. Wir wählen dazu nun $0 < x < \min(1, \delta)$ und setzen $y = x/2$. Dann gilt $x, y \in]0, 1]$,

$$|x - y| = \frac{x}{2} < \delta$$

und

$$|f(x) - f(y)| = \frac{3}{x^2} > 3 = \varepsilon.$$

(iii) Aus § 12 Satz 2 folgt, dass g stetig ist. Da $[0, 1]$ kompakt ist, folgt aus § 11 Satz 4 dass g gleichmäßig stetig ist.

Wir müssen noch zeigen, dass g nicht Lipschitz-stetig ist. Um einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an, dass g Lipschitz-stetig ist. Dann gibt es eine Konstante $L > 0$, so dass

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$$

für alle $x, y \in [0, 1]$ gilt. Als Gegenbeispiel wählen wir $y = 0$ und $x_n = 1/n^2$. Dann gilt

$$|g(x) - g(y)| = \frac{1}{n} \leq L\frac{1}{n^2}.$$

Also folgt $n \leq L$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was einen Widerspruch liefert. Also ist g nicht Lipschitz-stetig.

$\blacksquare$

(G10.3)

Sei $a < b \in \mathbb{R}$. Man beweise: Eine stetige Funktion $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn sie sich stetig auf das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ fortsetzen lässt.

Lösung.

$\Leftarrow$: Sei $\tilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\tilde{f}(x) = f(x)$ für $x \in [a, b[$. Nach § 11 Satz 4 ist $\tilde{f}$ gleichmäßig stetig, also ist auch f gleichmäßig stetig.

$\Rightarrow$: Sei $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Wir zeigen zunächst, dass f beschränkt ist. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(y)| < 1$$

für alle $x, y \in [a, b[$ mit $|x - y| < \delta$. Sei $x' := \max(a, b - \delta)$. Dann gilt für alle x mit $x \in [x', b[$

$$|f(x) - f(x')| < 1, \quad \text{also} \quad |f(x)| < 1 + |f(x')|,$$

d.h. f ist beschränkt auf $[x', b[$ und auch auf dem kompakten Intervall $[a, x']$, also auf ganz $[a, b[$.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a, b[$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = b$. Da die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine Teilfolge $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen eine reelle Zahl c konvergiert. Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichnen wir die Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ wieder mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir haben also

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c.$$

Wir zeigen jetzt, dass für jede Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a, b[$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ ebenfalls $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = c$ gilt. Dann können wir durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in [a, b[, \\ c & \text{falls } x = b \end{cases}$$

eine stetige Funktion $\tilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ definieren.

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(x_n) - c| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq N_1.$$

Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es außerdem ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $x, y \in [a, b[$ mit $|x - y| < \delta$. Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = b$ gibt es ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - b| < \delta \quad \text{und} \quad |y_n - b| < \delta \quad \text{für alle } n \geq N_2.$$

Für $n \geq N := \max(N_1, N_2)$ folgt dann wegen $|x_n - y_n| < \delta$

$$|f(y_n) - c| \leq |f(y_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Es folgt $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = c$.

$\blacksquare$

Hausaufgaben

(H10.4)

Sei $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 2x^4 + 16x - 32 + \sqrt{|x|}$.

(i) Ist f beschränkt? Ist f stetig?

(ii) Besitzt f ein Maximum und/oder ein Minimum?

(iii) Zeigen Sie, dass f mindestens eine Nullstelle besitzt.

(iv) Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = -1$ mindestens eine Lösung besitzt.

Lösung.

(i) Die Funktion f ist stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen, und sie ist beschränkt, weil sie stetig ist und auf einem kompakten Intervall definiert ist.

(ii) Als stetige Funktion auf einem kompakten Intervall besitzt f sowohl ein Maximum, als auch ein Minimum.

(iii) Wegen $f(-2) = \sqrt{2} - 64 < 0$ und $f(2) = \sqrt{2} + 64 > 0$ besitzt f nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle im Intervall $[-2, 2]$.

(iv) Wegen $f(-2) = \sqrt{2} - 64 < -1$ und $f(2) = \sqrt{2} + 64 > -1$ existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in [-2, 2]$ mit $f(x) = -1$.

$\blacksquare$

(H10.5)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(0) = 1$ und es gelte $f(x + y) \leq f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist f in 0 stetig, so ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Lösung.

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. Dann ist auch die Folge $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\delta_n := x - x_n$, $n \in \mathbb{N}$, konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$. Da f nach

Voraussetzung in 0 stetig ist, gilt $\lim_{n\to\infty} f(\delta_n) = f(0) = 1$, also gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass $f(\delta_n) > 1/2$ für alle $n \geq N_0$ gilt.

Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Voraussetzung

$$f(x_n) = f(x - \delta_n) \leq f(x) \cdot f(-\delta_n),$$

sowie

$$f(x) = f(x_n + \delta_n) \leq f(x_n) \cdot f(\delta_n).$$

Aus diesen beiden Ungleichungen folgt, dass für alle $n \geq N_0$ gilt

$$\frac{f(x)}{f(\delta_n)} \leq f(x_n) \leq f(x) \cdot f(-\delta_n).$$

Nun ist $\lim_{n\to\infty} f(x)/f(\delta_n) = f(x)/1 = f(x)$ und, da auch die Folge $(-\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, auch $\lim_{n\to\infty} f(x) \cdot f(-\delta_n) = f(x) \cdot 1 = f(x)$. Nach (G4.2)(i) (der "Sandwichsatz") gilt also

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x),$$

was genau die Stetigkeit von f in x bedeutet.

■