Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I
Übung 9

Aufgabe 1

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$f_n(x) := |x+1|^n .$$

(a) Zeigen Sie, daß f_n für jedes n stetig ist.

(b) Für welche x ist die Funktion

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

definiert? In welchen x ist sie stetig?

Lösung. (a) Die Funktionen

$$h(x) := x+1, \quad h'(x) := |x|, \quad \text{und} \quad h''_n(x) := x^n$$

sind alle stetig. Da $f_n = h''_n \circ h' \circ h$ folgt mit §10 Satz 2, daß auch f_n stetig ist.

(b) $g(x)$ ist definiert für $x \in [-2, 0]$ und es gilt

$$g(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } -2 < x < 0, \\ 1 & \text{für } x = -2 \text{ oder } x = 0 . \end{cases}$$

Die Funktion g ist in jedem Punkt $x \in (-2, 0)$ stetig, da es zu solchen x eine Umgebung $(x-\delta, x+\delta)$ gibt, auf der g konstant ist.

g ist nicht im Punkt 0 stetig, da für die Folge $x_n := -\frac{1}{n}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \neq g(0) .$$

Analog folgt, daß g nicht in $x = -2$ stetig ist.

Aufgabe 2

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$. Zeigen Sie, daß f genau dann stetig im Punkt a ist, wenn gilt

$$\lim_{x\nearrow a} f(x) = f(a) = \lim_{x\searrow a} f(x) .$$

Lösung. Offensichtlich folgt aus $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, daß

$$\lim_{x\nearrow a} f(x) = f(a) \quad \text{und} \quad \lim_{x\searrow a} f(x) = f(a) .$$

Nehmen wir also umgekehrt an, daß

$$\lim_{x\nearrow a} f(x) = f(a) = \lim_{x\searrow a} f(x) .$$

Wir müssen zeigen, daß dann auch $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ gilt.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen a konvergiert. Wenn es einen Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, mit $x_n \le a$ für alle $n \ge N$, so ist

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_{N+n}) = \lim_{x\nearrow a} f(x) = f(a)\,.$$

Für den Fall, daß es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \ge a$ für alle $n \ge N$ gibt, argumentieren wir analog.

Es bleibt also der Fall, das es unendlich viele n mit $x_n \le a$ und unendlich viele n mit $x_n \ge a$ gibt. Sei $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ die Teilfolge aller Glieder mit $x_{k_n} \le a$ und sei $(x_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ die Teilfolge aller Glieder mit $x_{m_n} \ge a$. Um zu zeigen, daß $f(x_n)$ gegen $f(a)$ konvergiert, betrachten wir ein $\varepsilon > 0$. Nach Annahme gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(a) = \lim_{n\to\infty} f(x_{m_n})\,.$$

Also gibt es $N, N' \in \mathbb{N}$, mit

$$\begin{aligned} &|f(x_{k_n}) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{für } n \ge N\,,\\ \text{und}\quad &|f(x_{m_n}) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{für } n \ge N'\,. \end{aligned}$$

Für $M := \max\{k_N, m_{N'}\}$ folgt hieraus wie gewünscht

$$|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{für } n \ge M\,.$$

Hausaufgaben

Aufgabe 3

In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig?

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0\,,\\ x^2 & \text{für } x > 0\,. \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0\,,\\ \frac{1}{n} & \text{für } \frac{1}{n} \le x < \frac{1}{n-1}\,, n \in \mathbb{N}\,, n > 1\,,\\ 1 & \text{für } x \ge 1 \end{cases}$$

Aufgabe 4

Seien $f_1 : D_1 \to \mathbb{R}$ und $f_2 : D_2 \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, welche auf abgeschlossenen Intervallen $D_k = [a_k, b_k]$ definiert sind. Angenommen, es gilt

$$f_1(x) = f_2(x) \quad \text{für alle } x \in D_1 \cap D_2\,.$$

Dann können wir eine Funktion $g : D_1 \cup D_2 \to \mathbb{R}$ definieren durch

$$g(x) := \begin{cases} f_1(x) & \text{für } x \in D_1\,,\\ f_2(x) & \text{für } x \in D_2\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß g stetig ist.