

04.12.2009

## 8. Übung Analysis I Wintersemester 2009/2010

(G8.1)

(i) Zeigen Sie, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ .

(ii) Sei  $0 < \alpha < 1$ . Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei definiert durch:

$$a_0 := \alpha, \quad a_{n+1} := \frac{2a_n + 1}{3}, \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

**Lösung.**

(i) Für  $n \geq 1$  gilt  $\sqrt[n]{n} \geq 1$  und  $\sqrt[n]{n+1} > 1$ . Weiter gilt  $\sqrt[n]{n+1} > \sqrt[n]{n}$ . Also genügt es zu zeigen, dass für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $n > N$  gilt  $\sqrt[n]{n+1} < 1 + \varepsilon$ , d.h.,  $n+1 < (1+\varepsilon)^n$ . Aus dem binomischen Lehrsatz folgt, dass für  $n > 1$  gilt

$$(1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varepsilon^k > \binom{n}{2} \varepsilon^2 = (n-1)n \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Es reicht also, wenn

$$(n-1)n \frac{\varepsilon^2}{2} > n+1$$

gilt, d.h.

$$(n-1) \frac{\varepsilon^2}{2} > 1 + \frac{1}{n}.$$

Mit  $N := \lceil \frac{4}{\varepsilon^2} \rceil + 1$  gilt für  $n > N$ , dass

$$(n-1) \frac{\varepsilon^2}{2} > 2 > 1 + \frac{1}{n},$$

und somit

$$1 + \varepsilon > \sqrt[n]{n+1} > 1.$$

(ii) Wir zeigen, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $0 < a_n < 1$ , und dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend ist. Offensichtlich gilt  $0 < a_0 < 1$ . Gilt  $0 < a_n < 1$ , dann gilt

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{3} > 0 \quad \text{und} \quad a_{n+1} < \frac{2 \cdot 1 + 1}{3} = 1,$$

und somit  $0 < a_n < 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Weiter gilt

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n + 1}{3} - a_n = \frac{2a_n + 1 - 3a_n}{3} = \frac{1 - a_n}{3} > 0,$$

und somit ist die Folge monoton wachsend. Also existiert  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es  $n \in \mathbb{N}$  so dass

$$(\forall m \geq n)(|a - a_m| < \varepsilon),$$

und somit

$$(\forall m \geq n)(|a - a_{m+1}| < \varepsilon).$$

Also gilt

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \geq n)(|a - a_{m+1}| < \varepsilon),$$

d.h.  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$ . Wir erhalten

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 1}{3} = \frac{2(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) + 1}{3} = \frac{2a + 1}{3},$$

d.h.,  $a = 1$ . ■

(G8.2)

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge reeller Zahlen und  $H$  die Menge ihrer Häufungspunkte. Man zeige

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup H, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf H$$

und  $\sup H \in H, \inf H \in H$ .

(Das heißt, wir zeigen, dass der Limes superior und der Limes inferior das Maximum bzw. das Minimum der Menge der Häufungspunkte sind.)

**Lösung.**

Wir beweisen nur  $\limsup a_n = \sup H$  und  $\sup H \in H$ , da  $\liminf a_n = \inf H$  und  $\inf H \in H$  analog bewiesen werden können.

Wir setzen  $A := \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  und

$$A_n := \sup\{a_k : k \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Da  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist, gilt  $A \in \mathbb{R}$  und  $A_n \in \mathbb{R}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Nach Definition gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A.$$

Wir beweisen nun

$$A \in H \tag{1}$$

und

$$a \leq A \quad \text{für alle } a \in H. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann  $A = \sup H$  und  $\sup H \in H$ .

Beweis von (1):  $H$  ist die Menge aller Grenzwerte von konvergenten Teilfolgen der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , und somit genügt es zu zeigen, dass

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists N \geq n)(|a_N - A| < \varepsilon).$$

Sei  $\varepsilon > 0$ , und sei  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$  gibt es  $m \geq n$ , so dass

$$|A_m - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

und da  $A_m := \sup\{a_k : k \geq m\}$  gibt es  $N \geq m$ , so dass

$$|a_N - A_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also folgt  $N \geq n$  und

$$|a_N - A| \leq |a_N - A_m| + |A_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Damit ist (1) bewiesen.

Beweis von (2): Sei  $a \in H$ . Dann existiert eine Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  so dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ . Wir erhalten

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} A_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A,$$

und damit ist (2) bewiesen. Es folgt  $A = \sup H$  und  $\sup H \in H$ . ■

## Hausaufgaben

**(H8.3)**

Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei definiert durch

$$a_0 := \frac{5}{2}, \quad a_{n+1} := \frac{a_n^2 + 6}{5}.$$

Man beweise, dass die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert und bestimme ihren Grenzwert.

**Lösung.**

**(H8.4)**

Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkte Folgen in  $\mathbb{R}$ .

(i) Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n. \end{aligned}$$

(ii) Geben Sie zwei Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  an, für die in (i) überall “<” gilt.

**Lösung.**