Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

04.12.2009

8. Übung Analysis I
Wintersemester 2009/2010

(G8.1)

(i) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$.

(ii) Sei $0 < \alpha < 1$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch:

$$a_0 := \alpha, \qquad a_{n+1} := \frac{2a_n + 1}{3}, \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Lösung.

(i) Für $n \geq 1$ gilt $\sqrt[n]{n} \geq 1$ und $\sqrt[n]{n+1} > 1$. Weiter gilt $\sqrt[n]{n+1} > \sqrt[n]{n}$. Also genügt es zu zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n > N$ gilt $\sqrt[n]{n+1} < 1 + \varepsilon$, d.h., $n + 1 < (1 + \varepsilon)^n$. Aus dem binomischen Lehrsatz folgt, dass für $n > 1$ gilt

$$(1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k > \binom{n}{2} \varepsilon^2 = (n-1)n\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Es reicht also, wenn

$$(n-1)n\frac{\varepsilon^2}{2} > n+1$$

gilt, d.h.

$$(n-1)\frac{\varepsilon^2}{2} > 1 + \frac{1}{n}.$$

Mit $N := \lceil \frac{4}{\varepsilon^2} \rceil + 1$ gilt für $n > N$, dass

$$(n-1)\frac{\varepsilon^2}{2} > 2 > 1 + \frac{1}{n},$$

und somit

$$1 + \varepsilon > \sqrt[n]{n+1} > 1.$$

(ii) Wir zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < a_n < 1$, und dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist. Offensichtlich gilt $0 < a_0 < 1$. Gilt $0 < a_n < 1$, dann gilt

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{3} > 0 \quad \text{und} \quad a_{n+1} < \frac{2 \cdot 1 + 1}{3} = 1,$$

und somit $0 < a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n + 1}{3} - a_n = \frac{2a_n + 1 - 3a_n}{3} = \frac{1 - a_n}{3} > 0,$$

und somit ist die Folge monoton wachsend. Also existiert $a := \lim_{n\to\infty} a_n$.

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ so dass

$$(\forall m \geq n)(|a - a_m| < \varepsilon),$$

und somit

$$(\forall m \geq n)(|a - a_{m+1}| < \varepsilon).$$

Also gilt

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \geq n)(|a - a_{m+1}| < \varepsilon),$$

d.h. $a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$. Wir erhalten

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2a_n + 1}{3} = \frac{2(\lim_{n\to\infty} a_n) + 1}{3} = \frac{2a + 1}{3},$$

d.h., $a = 1$.

■

(G8.2)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen und H die Menge ihrer Häufungspunkte. Man zeige

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup H, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \inf H$$

und $\sup H \in H$, $\inf H \in H$.

(Das heißt, wir zeigen, dass der Limes superior und der Limes inferior das Maximum bzw. das Minimum der Menge der Häufungspunkte sind.)

Lösung.

Wir beweisen nur $\limsup a_n = \sup H$ und $\sup H \in H$, da $\liminf a_n = \inf H$ und $\inf H \in H$ analog bewiesen werden können.

Wir setzen $A := \limsup_{n\to\infty} a_n$ und

$$A_n := \sup\{a_k : k \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gilt $A \in \mathbb{R}$ und $A_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Definition gilt

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A.$$

Wir beweisen nun

$$A \in H \tag{1}$$

und

$$a \leq A \quad \text{für alle } a \in H. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann $A = \sup H$ und $\sup H \in H$.

Beweis von (1): H ist die Menge aller Grenzwerte von konvergenten Teilfolgen der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und somit genügt es zu zeigen, dass

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists N \geq n)(|a_N - A| < \varepsilon).$$

Sei $\varepsilon > 0$, und sei $n \in \mathbb{N}$. Da $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ gibt es $m \geq n$, so dass

$$|A_m - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

und da $A_m := \sup\{a_k : k \geq m\}$ gibt es $N \geq m$, so dass

$$|a_N - A_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also folgt $N \geq n$ und

$$|a_N - A| \leq |a_N - A_m| + |A_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Damit ist (1) bewiesen.

Beweis von (2): Sei $a \in H$. Dann existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so dass $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Wir erhalten

$$a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leq \lim_{k\to\infty} A_{n_k} = \lim_{n\to\infty} A_n = A,$$

und damit ist (2) bewiesen. Es folgt $A = \sup H$ und $\sup H \in H$.

■

Hausaufgaben

(H8.3)

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$a_0 := \frac{5}{2}, \quad a_{n+1} := \frac{a_n^2 + 6}{5}.$$

Man beweise, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme ihren Grenzwert.

Lösung.

Wir bemerken zuerst, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n > 0$. Zunächst zeigen wir, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{n+1} < a_n. \tag{3}$$

Für $n = 0$ gilt (3), da

$$a_1 = \frac{(\frac{5}{2})^2 + 6}{5} = \frac{49}{20} < \frac{5}{2} = a_0.$$

Sei $a_{n+1} < a_n$. Dann gilt

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + 6}{5} < \frac{a_n^2 + 6}{5} = a_{n+1},$$

und somit gilt (3) für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton fallend, und somit konvergent. Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 + 6}{5} = \frac{a^2 + 6}{5},$$

und somit

$$a = \frac{a^2 + 6}{5},$$

d.h.,

$$\frac{1}{5}a^2 - a + \frac{6}{5} = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $a = 2$ und $a = 3$. Da aber $a_n \leq 5/2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a = 3$ unmöglich, und es folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

■

(H8.4)

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n &\leq \liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.\end{aligned}$$

(ii) Geben Sie zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, für die in (i) überall "$<$" gilt.

Lösung.

(i) Wir setzen

$$\begin{array}{rclrcl} a &:=& \liminf_{n\to\infty} a_n, & A &:=& \limsup_{n\to\infty} a_n, \\ b &:=& \liminf_{n\to\infty} b_n, & B &:=& \limsup_{n\to\infty} b_n. \end{array}$$

Man beachte, dass alle diese Größen auf Grund der Beschränktheit der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren. Es sei nun ein $m \geq 1$ vorgegeben. Aus § 9 Satz 4 (und der darauf folgenden Bemerkung) folgt:

Es gibt ein $N_m \in \mathbb{N}$, so dass $a - 1/m \leq a_n \leq A + 1/m$ für alle $n \geq N_m$ gilt.

Analog erhält man, dass für ein geeignetes $\tilde{N}_m \in \mathbb{N}$

$$b - \frac{1}{m} \leq b_n \leq B + \frac{1}{m} \quad \text{für alle } n \geq \tilde{N}_m$$

gilt.

Für alle $n \geq \max(N_m, \tilde{N}_m)$ gilt damit

$$a + b - \frac{2}{m} \leq a_n + b_n \leq A + B + \frac{2}{m}.$$

Nun beobachten wir, dass mit den beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch die Summenfolge $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, womit $\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ und $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ existieren.

Wählen wir nun eine Teilfolge $(a_{n_k} + b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus, die gegen $\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ konvergiert (das geht nach (G8.2)), so gilt wegen der Verträglichkeit von Konvergenz und Ordnung

$$a + b - \frac{2}{m} \leq \lim_{k\to\infty}(a_{n_k} + b_{n_k}) = \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n)$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Nun lassen wir in obiger Ungleichung noch m nach unendlich streben. Dann erhalten wir, wieder mit Hilfe der Vertäglichkeit von Konvergenz und Ordnung

$$a + b \leq \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n).$$

Wählt man hingegen eine Teilfolge von $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus, die gegen den Limes superior dieser Folge konvergiert, so erhält man mit der gleichen Argumentation

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq A + B.$$

Abschließend brauchen wir nur noch, dass natürlich der Limes superior als größter Häufungspunkt der Folge größer oder gleich dem Limes inferior als kleinstem Häufungspunkt ist. Das ergibt

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n &= a + b \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \\ &\leq A + B \\ &= \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n, \end{aligned}$$

wie gefordert.

(ii) Wir wählen

$$a_n := \begin{cases} 0, & \text{falls } n \in \mathbb{N} \text{ gerade,} \\ 1, & \text{falls } n \in \mathbb{N} \text{ ungerade,} \end{cases}$$

und

$$b_n := \begin{cases} 2, & \text{falls } n \in \mathbb{N} \text{ gerade,} \\ 0, & \text{falls } n \in \mathbb{N} \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n &= 0 \\ &< 1 = \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \\ &< 2 = \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \\ &< 3 = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n. \end{aligned}$$

■