Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

27.11.2009

7. Übung Analysis I
Wintersemester 2009/2010

(G7.1) (Wurzelkriterium)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Es gebe ein θ mit $0 < \theta < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$(\forall n \geq n_0)(\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta).$$

(i) Man beweise, dass die Reihe absolut konvergiert.

(ii) Man zeige, dass die Bedingung

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\sqrt[n]{|a_n|} < 1) \tag{1}$$

nicht hinreichend für die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist. Ist dies eine notwendige Bedingung?

Lösung.

(i) Für $n \geq n_0$ gilt $|a_n| \leq \theta^n$. Da $0 < \theta < 1$, konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \theta^n$. Also folgt aus dem Majoranten-Kriterium, dass $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

(ii) Als Gegenbeispiel wählen wir die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n = 1/2$ für $n \geq 0$. Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} < 1 \iff |a_n| < 1^n = 1,$$

also gilt $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ für alle $n \geq 0$. Die Reihe ist aber divergent, da $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ nicht gilt.

Die Bedingung (1) ist aber notwendig für die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Falls (1) nicht gilt gibt es nämlich für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n \geq n_0$, so dass $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, also $|a_n| \geq 1$. Also gilt nicht $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert.

■

(G7.2)

Die bijektive Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei eine beschränkte Umordnung, d.h. es gebe ein $d \in \mathbb{N}$, so dass

$$|\tau(n) - n| \leq d \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Man beweise: Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ konvergiert.

Lösung.

Wir nehmen zuerst an, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $d > 0$. Sei $\varepsilon > 0$, und sei $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{4d}$$

für $n \geq N$. Sei weiter $N' \in \mathbb{N}$ so dass für $m \geq n \geq N'$ gilt

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei $M := \max(N, N') + d$, und sei $m \geq n \geq M$. Wir zeigen jetzt, dass

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_{\tau(k)}\right| < \varepsilon,$$

und somit, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ konvergiert.

Für $n \leq k \leq m$ gilt $n - d \leq \tau(k) \leq m + d$, und somit

$$|a_{\tau(k)}| < \frac{\varepsilon}{4d}.$$

Wir setzen

$$A := \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq m\}$$

und

$$B := \{k \in \mathbb{N} : n - d \leq k \leq m + d \ \text{ und } \ k \notin \tau[A]\},$$

wobei $\tau[A] := \{k \in \mathbb{N} : (\exists n \in A)(\tau(n) = k)\}$ ist. Da τ bijektiv ist, gilt $|\tau[A]| = m - n + 1$ und somit $|B| = 2d$, wobei $|\tau[A]|$ und $|B|$ die Anzahl der Elemente in $\tau[A]$ bzw. B sind.

Also gilt

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n}^{m} a_{\tau(k)}\right| &= \left|\sum_{k=n-d}^{m+d} a_k - \sum_{k\in B} a_k\right| \\ &\leq \left|\sum_{k=n-d}^{m+d} a_k\right| + \left|\sum_{k\in B} a_k\right|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left|\sum_{k=n-d}^{m+d} a_k\right| + \sum_{k\in B} |a_k| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k\in B} \frac{\varepsilon}{4d} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2d \cdot \frac{\varepsilon}{4d} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Sei jetzt $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ konvergent. Wir bemerken, dass $\tau^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ auch eine beschränkte Umordnung ist, und dass $\tau^{-1}(\tau(n)) = n$ gilt. Also folgt nach dem, was wir schon bewiesen haben, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert.

■

Hausaufgaben

(H7.3)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergent sind, bzw. für welche $x \in \mathbb{R}$ die konvergent sind:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$.

Lösung.

(i) Es sei $a_n := \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ für $n \geq 1$. Da

$$a_n \geq \frac{n^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}$$

ist die Reihe divergent nach dem Minoranten-Kriterium.

(ii) Wir verwenden das Wurzelkriterium. Es sei $a_n := 2^n \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n x^n$ für $n \geq 1$. Dann gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = 2\left(1+\frac{1}{n}\right)|x| \xrightarrow{n\to\infty} 2|x|,$$

also konvergiert die Reihe absolut für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1/2$. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq 1/2$ gilt $|2x| \geq 1$, und daher

$$|a_n| = 2^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n |x|^n = |2x|^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1.$$

Also gilt nicht $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, und die Reihe divergiert.

■

(H7.4)

In der Vorlesung haben wir die Definition der Eulerschen Zahl e gesehen:

$$e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen, $s_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

(i) Man beweise: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Abschätzung

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq e - s_n \leq \frac{e-1}{(n+1)!}.$$

(Für $n = 2$ liefert diese Abschätzung $2,66 < e < 2,8$.)

(ii) Nehmen Sie an, dass $p, q \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $e = p/q$, und benutzen Sie die Abschätzung aus (i) mit $n = q$ um einen Widerspruch zu erhalten.

Lösung.

(i) Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \geq 1$ gilt

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq s_{n+k} - s_n \leq \frac{s_k - 1}{(n+1)!},$$

für $k \to \infty$ ergibt sich somit

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq e - s_n \leq \frac{e-1}{(n+1)!}.$$

(ii) Wir nehmen an, dass $e = p/q$, und betrachten die Abschätzung

$$\frac{1}{(q+1)!} \leq e - s_q \leq \frac{e-1}{(q+1)!}.$$

Multiplizieren wir diese Ungleichung mit $q!$, folgt

$$0 < \frac{1}{q+1} \leq p(q-1)! - q!s_q \leq \frac{e-1}{q+1} < \frac{2}{q+1} \leq 1,$$

und somit

$$0 < p(q-1)! - q!s_q < 1.$$

Da jedoch $p(q-1)! - q!s_q \in \mathbb{Z}$ gilt, ist dies unmöglich und wir erhalten einen Widerspruch. Somit gilt $e \notin \mathbb{Q}$.

■