Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I
Übung 6

Aufgabe 1

Bestimmen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Reihen konvergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n!}}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n-1} x^n$.

Lösung. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die entsprechende Reihe.
(a) Wir wenden das Quotienten-Kriterium an:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \frac{\sqrt{n!}}{|x|^n} = \frac{|x|}{\sqrt{n+1}} \to 0.$$

Also konvergiert die Reihe absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.
(b) Für $|x| \geq 1$ ist

$$\left|\sum_{n=1}^{k} \frac{n}{n-1} x^n\right| \geq \left|\sum_{n=1}^{k} 1 \cdot 1\right| = k\,.$$

Also sind die Partialsummen nicht beschränkt und die Reihe konvergiert nicht. Für $|x| < 1$ zeigen wir, daß die Reihe konvergiert. Sei $\varepsilon := \frac{1-|x|}{2|x|} > 0$. Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n-1)}{n^2} = 1$$

gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{(n+1)(n-1)}{n^2} < 1 + \varepsilon$$

für $n \geq N$. Hieraus folgt

$$\left|\frac{\frac{n+1}{n} x^{n+1}}{\frac{n}{n-1} x^n}\right| = \left|\frac{(n+1)(n-1)}{n^2} x\right| < (1+\varepsilon)|x| = |x| + \frac{1-|x|}{2} = \frac{1+|x|}{2} < 1\,.$$

für $n \geq N$. Nach dem Quotienten-Kriterium konvergiert also die Reihe.

Aufgabe 2

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen, so daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert. Konvergieren dann auch die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}\,?$$

Lösung. Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Null-Folge. Somit gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n < 1$ für $n \geq N$. Somit gilt $0 < a_n^2 < a_n$ für solche n. Nach dem Majoranten-Kriterium folgt, daß die Reihe $\sum_{n=N}^{\infty} a_n^2$ absolut konvergiert. Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ ebenfalls.

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Null-Folge ist, geht $(1/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen unendlich. Insbesondere ist es keine Null-Folge und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ divergiert.

Hausaufgaben

Aufgabe 3

Welche der folgenden Reihen konvergieren, welche konvergieren absolut?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$.

Lösung. (a) Für $a_n := \frac{2n+1}{n(n+1)}$ gilt

$$a_n - a_{n+1} = \frac{(2n+1)(n+2)-(2n+3)n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2n+2}{n(n+1)(n+2)} \geq 0.$$

Also ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ monoton fallend. Wegen

$$0 \leq a_n = \frac{2n+1}{n(n+1)} \leq \frac{3n}{n \cdot n} = \frac{3}{n}$$

konvergiert $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gegen 0. Nach dem Leibnizschen Konvergenz-Kriterium konvergiert also auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$. Sie konvergiert nicht absolut, da

$$|a_n| = \frac{2n+1}{n(n+1)} \geq \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}$$

und $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ divergiert.

(b) Für $a_n := \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$ gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2n+1}{(\sqrt{2})^{n+1}} \cdot \frac{(\sqrt{2})^n}{2n-1} = \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} =: b_n.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$b_n - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

für $n \geq N$. Also ist

$$b_n \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 1,$$

und die Reihe konvergiert nach dem Quotienten-Kriterium.

Aufgabe 4

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Wir setzen

$$d_n := n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Wenn es eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ und ein $\beta > 1$ gibt mit $d_n \geq \beta$ für alle $n \geq N$, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
Hinweis. Zeigen Sie zuerst, daß

$$(\beta - 1)a_n \leq (n-1)a_n - na_{n+1}, \quad \text{für } n \geq N.$$

(b) Die Voraussetzung für das Quotienten-Kriterium impliziert die Voraussetzung für das Kriterium aus (a). Das heißt, wenn man mit dem Quotienten-Kriterium zeigen kann, daß eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann kann man dies auch mit dem Kriterium aus (a) zeigen.

Lösung. (a) Für $n \geq N$ gilt

$$(\beta - 1)a_n \leq (d_n - 1)a_n = \left(n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1\right) a_n = (n-1)a_n - na_{n+1} .$$

Hieraus folgt für $m > N$, daß

$$(\beta - 1) \sum_{n=N}^{m} a_n \leq \sum_{n=N}^{m} ((n-1)a_n - na_{n+1}) = (N-1)a_N - ma_{m+1} \leq (N-1)a_N .$$

Also ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ beschränkt und somit konvergent.

(b) Angenommen, es gibt ein $N_0 \in \mathbb{N}$ und ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$ und

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$$

für alle $n \geq N_0$. Für solche n ist dann

$$d_n \geq n(1-q) .$$

Also gibt es eine Zahl $N \geq N_0$ mit $d_n \geq 2$ für $n \geq N$. Somit können wir in (a) $\beta := 2$ setzen.