Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

05.11.2009

4. Übung Analysis I
Wintersemester 2009/2010

(G4.1)

(i) Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien definiert durch

$$a_n := \frac{(3-n)^3}{3n^3-1} \quad \text{bzw.} \quad b_n := \frac{1+(-1)^n n^2}{2+3n+n^2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Man entscheide bei beiden Folgen, welche der drei Eigenschaften "beschränkt", "konvergent" bzw. "divergent" vorliegen, und man bestimme im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

(ii) Bestimmen Sie den Wert der Reihen

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5\cdot 3^n}{4^{n+2}}, \qquad \text{(b)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2-1}.$$

Lösung.

(i) Es gilt

$$\frac{(3-n)^3}{3n^3-1} = \frac{-n^3+9n^2-27n+27}{3n^3-1},$$

und für $n > 0$ haben wir

$$\frac{-n^3+9n^2-27n+27}{3n^3-1} = \frac{-1+9/n-27/n^2+27/n^3}{3-1/n^3}.$$

Also gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = -1/3$, da

$$\lim_{n\to\infty} 9/n = \lim_{n\to\infty} 27/n^2 = \lim_{n\to\infty} 27/n^3 = \lim_{n\to\infty} 1/n^3 = 0.$$

Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht divergent, sondern konvergent gegen $-1/3$, und daher auch beschränkt.

Wir betrachten jetzt $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für $n = 2k$, $k > 0$, gilt

$$b_n = \frac{1+n^2}{2+3n+n^2} = \frac{1/n^2+1}{2/n^2+3/n+1},$$

also konvergiert die Folge $(b_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 1. Für $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, gilt

$$b_n = \frac{1-n^2}{2+3n+n^2} = \frac{1/n^2-1}{2/n^2+3/n+1},$$

also konvergiert die Folge $(b_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen -1. Sei $M_1 \in \mathbb{N}$ so dass

$$|b_{2k}-1| < \frac{1}{2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $2k \geq M_1$, und sei $M_2 \in \mathbb{N}$ so dass

$$|b_{2k+1}-(-1)| < \frac{1}{2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $2k+1 \geq M_2$. Für $n \geq M := \max(M_1, M_2)$ gilt daher

$$|b_{n+1}-b_n| > 1.$$

Wenn $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen ein $b \in \mathbb{R}$ wäre, so würde es $N \in \mathbb{N}$ geben, so dass für alle $n \geq N$

$$|b_n - b| < \frac{1}{2},$$

und daher

$$|b_{n+1}-b_n| < 1.$$

Für $n \geq \max(M, N)$ würde daher $|b_{n+1}-b_n| > 1$ und $|b_{n+1}-b_n| < 1$ gelten, was ein Widerspruch wäre. Also konvergiert $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht, d.h., die Folge ist divergent. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist aber beschränkt, da

$$|b_n| \leq \max\{|b_0|, |b_1|, \ldots, |b_M|, 3/2\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(ii) (a) Mit Hilfe der geometrischen Reihe erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5\cdot 3^n}{4^{n+2}} = \frac{5}{4^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{5}{4^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{5}{4}.$$

(b) Es gilt für jedes $k \geq 2$

$$\frac{2}{k^2-1} = \frac{2}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1},$$

also haben wir für jedes $n \geq 2$ mit einem Indexshift

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^2-1} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^2-1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{2}.$$

■

(G4.2)

(i) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei reelle Zahlenfolgen mit

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{für alle } n \geq N,$$

wobei $N \in \mathbb{N}$ ist. Man zeige: Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n =: c \in \mathbb{R},$$

so ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und besitzt ebenfalls den Grenzwert c.

(ii) Man gebe Beispiele reeller Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ an, so dass jeder der folgenden Fälle eintritt:

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$.

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = -\infty$.

(c) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = c$, wobei c eine beliebig vorgegebene reelle Zahl ist.

(d) Die Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

Lösung.

(i) Für $n \geq N$ gilt

$$|b_n - c| \leq |b_n - a_n| + |a_n - c| \leq |c_n - a_n| + |a_n - c|.$$

Da $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = c$, gilt $\lim_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$. Also impliziert die obige Ungleichung, dass $\lim_{n\to\infty}(b_n - c) = 0$, und daher $\lim_{n\to\infty} b_n = c$.

(ii) Zum Beispiel:

(a) $a_n = n^2$, $b_0 = 1$, $b_n = 1/n$ für $n > 0$, $a_n b_n = n$.

(b) $a_n = n^2$, $b_0 = 1$, $b_n = -1/n$ für $n > 0$, $a_n b_n = -n$.

(c) $a_n = n$, $b_0 = 1$, $b_n = c/n$ für $n > 0$, $a_n b_n = c$ für $n > 0$.

(d) $a_n = n$, $b_0 = 1$, $b_n = (-1)^n/n$ für $n > 0$, $a_n b_n = (-1)^n$ für $n > 0$.

■