Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

05.11.2009

4. Hausübung Analysis I
Wintersemester 2009/2010

(H4.1)

(i) Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien definiert durch

$$a_n := \frac{1-3n^4}{n^4+5n^3+n+1} \quad \text{bzw.} \quad b_n := \frac{n^3-(-1)^n n^2}{9+7n+2n^5} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Man entscheide bei beiden Folgen, welche der drei Eigenschaften "beschränkt", "konvergent" bzw. "divergent" vorliegen, und man bestimme im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

(ii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge mit $a_0 > 0$, $a_3 = -2/9$ und $a_5 = -2/81$. Die unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sei *geometrisch*, d.h., es gibt $c, x \in \mathbb{R}$ so dass $a_n = cx^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Berechnen Sie den Grenzwert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(iii) Berechnen Sie den Reihenwert der folgende Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+k}\Big].$$

Lösung.

(i) Wir betrachten zuerst $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für $n > 0$ gilt

$$a_n = \frac{1-3n^4}{n^4+5n^3+n+1} = \frac{1/n^4-3}{1+5/n+1/n^3+1/n^4},$$

also gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n^4-3}{1+5/n+1/n^3+1/n^4} = -3,$$

da

$$\lim_{n\to\infty} 1/n^4 = \lim_{n\to\infty} 5/n = \lim_{n\to\infty} 1/n^3 = \lim_{n\to\infty} 4/n^3 = 0.$$

Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht divergent, sondern konvergent gegen -3, und daher auch beschränkt.

Wir betrachten jetzt $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für $n > 0$ gilt

$$b_n = \frac{n^3-(-1)^n n^2}{9+7n+2n^5} = \frac{1/n^2-(-1)^n/n^3}{9/n^5+7/n^4+2},$$

also gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n^2-(-1)^n/n^3}{9/n^5+7/n^4+2} = 0,$$

da

$$\lim_{n\to\infty} 1/n^2 = \lim_{n\to\infty}(-1)^n/n^3 = \lim_{n\to\infty} 9/n^5 = \lim_{n\to\infty} 7/n^4 = 0.$$

Also ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht divergent, sondern konvergent gegen 0, und daher auch beschränkt.

(Dass $\lim_{n\to\infty}(-1)^n/n^3 = 0$, folgt, da $\lim_{n\to\infty} 1/n^3 = 0$ und $|(-1)^n/n^3 - 0| = |1/n^3 - 0|$.)

(ii) Wir müssen $c, x \in \mathbb{R}$ finden, so dass $a_n = cx^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir haben $cx^3 = -2/9$ und $cx^5 = -2/81$. Also ist $x^2 = 1/9$, und da $c > 0$ folgt, dass $x = -1/3$. Daraus folgt $c = 6$, also gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} 6\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 6\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 6\cdot\frac{1}{1-(-1/3)} = \frac{9}{2}.$$

(iii) Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+k} = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big(\frac{1}{2}\Big)^k\cdot 1^{n-k} = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n\Big(1+\frac{1}{2}\Big)^n = \Big(\frac{3}{4}\Big)^n.$$

Also ist mit der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+k}\Big] = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{3}{4}\Big)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4.$$

■

(H4.2)

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Entscheiden Sie für die folgenden vier Aussagen jeweils, ob sie allgemein gültig sind. Geben Sie jeweils einen Beweis, bzw. ein Gegenbeispiel an.

(i) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so ist $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(ii) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so ist $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(iii) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so ist $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(iv) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so ist $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

Lösung.

(i) *Behauptung:* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent $\Longrightarrow$ $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

Beweis:

Annahme: $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, ist auch die Folge $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Das bedeutet aber nach Annahme dass die Folge $(a_n + b_n + (-a_n))_{n\in\mathbb{N}} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also muss $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent sein.

(ii) Die Aussage ist *falsch*.

Gegenbeispiel: Wir setzen $a_0 = b_0 = 1$, und $a_n = 1/n$ und $b_n = n$ für $n \geq 1$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bekanntermaßen konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, denn diese Folge ist offensichtlich nicht beschränkt. Wir erhalten dann als Produktfolge $a_n \cdot b_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also offensichtlich eine konvergente Folge.

(iii) Die Aussage ist *falsch*.

Gegenbeispiel: Wir setzen $a_n = (-1)^n$ und $b_n = (-1)^{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bekanntermaßen divergent und für $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erhält man Divergenz in gleicher Weise wie für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aber es ist

$$a_n + b_n = (-1)^n + (-1) \cdot (-1)^n = (-1)^n - (-1)^n = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist die Summenfolge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(iv) Die Aussage ist *falsch*.

Gegenbeispiel: Wir setzen dieses Mal $a_n = b_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, aber es ist $a_n \cdot b_n = (-1)^n \cdot (-1)^n = (-1)^{2n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

$\blacksquare$