Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

30.10.2009

3. Übung Analysis I
Wintersemester 2009/2010

(G3.1)

Man zeige: Zu jeder reellen Zahl $b > 1$ existiert eine natürliche Zahl n_0, so dass $b^n > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt.

Lösung.

Die Lösung dieser Aufgabe ist eine einfache Folgerung aus der Abschätzung in Aufgabe 4 in Übung 2. Setze $x := b - 1 > 0$. Dann gilt für $n \geq 2$

$$b^n = (1 + x)^n \geq \frac{n^2}{4} x^2.$$

Nach dem Archimedischen Axiom gibt es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 2$, so dass

$$nx^2 > 4 \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Daraus folgt

$$b^n \geq n \cdot \frac{nx^2}{4} > n \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

■

(G3.2)

(a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$|x - a| + |x - b| \leq b - a,$$

wobei $a \leq b$.

(b) Beweisen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y > 0$ gilt

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

Lösung.

(a)

1. Fall $x < a$.
   Dann gilt
   $$|x - a| + |x - b| = (a - x) + (b - x),$$
   also
   $$\begin{aligned} |x - a| + |x - b| \leq b - a &\quad \Leftrightarrow \\ -2x \leq -2a &\quad \Leftrightarrow \\ x \geq a, & \end{aligned}$$
   was $x < a$ widerspricht. Also erfüllt kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x < a$ die Ungleichung.
2. Fall $a \leq x \leq b$.
   Dann gilt
   $$|x - a| + |x - b| = (x - a) + (b - x) = b - a.$$
   Also erfüllen alle $x \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x \leq b$ die Ungleichung.
3. Fall $x > b$.
   Dann gilt
   $$|x - a| + |x - b| = x - a + x - b,$$
   also
   $$\begin{aligned} |x - a| + |x - b| \leq b - a &\quad \Leftrightarrow \\ 2x \leq 2b &\quad \Leftrightarrow \\ x \leq b, & \end{aligned}$$
   was $x > b$ widerspricht. Also erfüllt kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x > b$ die Ungleichung.

Damit gilt $|x - a| + |x - b| \leq b - a$ g.d.w. $a \leq x \leq b$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} & (x - y)^2 \geq 0 \\ \Longrightarrow\ & x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \\ \Longrightarrow\ & x^2 + y^2 \geq 2xy \\ \overset{x,y>0}{\Longrightarrow}\ & \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \\ \Longrightarrow\ & \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2. \end{aligned}$$

■

Hausaufgaben

(G3.3)

(a) Beweisen Sie: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|.$$

(b) Beweisen Sie: Für $x, y, v, u \in \mathbb{R}$ gilt

$$\big||x - y| - |u - v|\big| \leq |x - u| + |v - y|.$$

Lösung.

(a) Das ist die *umgekehrte Dreiecksungleichung*. Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|,$$

also gilt $|x| - |y| \leq |x - y|$. Analog folgt durch vertauschen von x und y

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|.$$

Also gilt insgesamt

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|.$$

(b) Das ist die *Vierecksungleichung*. Wir erhalten

$$\begin{aligned} |x - y| &= |(x - u) + (u - y)| \\ &\leq |x - u| + |u - y| \\ &= |x - u| + |(u - v) + (v - y)| \\ &\leq |x - u| + |u - v| + |v - y|, \end{aligned}$$

also gilt, wenn $|x - y| \geq |u - v|$

$$\begin{aligned} \big||x - y| - |u - v|\big| &= |x - y| - |u - v| \\ &\leq |x - u| + |u - v| + |v - y| - |u - v| \\ &= |x - u| + |v - y|. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned} |u - v| &= |(u - x) + (x - v)| \\ &\leq |u - x| + |x - v| \\ &= |x - u| + |(x - y) + (y - v)| \\ &\leq |x - u| + |x - y| + |v - y|, \end{aligned}$$

also gilt, falls $|u - v| \geq |x - y|$

$$\begin{aligned} \big||x - y| - |u - v|\big| &= |u - v| - |x - y| \\ &\leq |x - u| + |x - y| + |v - y| - |x - y| \\ &= |x - u| + |v - y|. \end{aligned}$$

■

(G3.4)

(a) Zeigen Sie, dass folgende Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$$

(b) Wir sagen, eine Untermenge $U \subseteq \mathbb{R}$ ist *dicht* in $\mathbb{R}$ wenn

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists t \in U\, (x - \varepsilon < t < x + \varepsilon).$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist.

Lösung.

(a) Dies folgt unmittelbar aus der Bernoullischen Ungleichung.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Es existiert $n \in \mathbb{N}$ so dass $n\varepsilon > 1$, d.h., so dass $1/n < \varepsilon$. Sei $m := \lfloor nx \rfloor$. Dann gilt $m \in \mathbb{Z}$ und

$$m \leq nx < m + 1.$$

Wir setzen $q := m/n \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$q \leq x < q + \frac{1}{n},$$

also gilt $x - \varepsilon < q < x + \varepsilon$.

■