Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I
Übung 2

Aufgabe 1

Beweisen Sie die folgende Gleichung für reelle Zahlen $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$:

$$\Big(\sum_{i=1}^m a_i\Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^n b_k\Big) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_i b_k\,.$$

Hinweis. Versuchen Sie einen Beweis per Induktion nach m.
Lösung. Zunächst beweisen wir den Fall $m = 1$ und zwar per Induktion nach n. Für $n = 1$ reduziert sich die Aussage zu

$$a_1 \cdot b_1 = a_1 \cdot b_1\,.$$

Im Induktionsschritt erhalten wir mit (D)

$$a_1 \cdot \sum_{k=1}^{n+1} b_k = a_1 \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k + b_{n+1}\Big) = a_1 \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big) + a_1 b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_1 b_k + a_1 b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_1 b_k\,.$$

Damit haben wir die Gleichung für $m = 1$ bewiesen. Für größere m erhalten wir mit (D)

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{i=1}^{m+1} a_i\Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^n b_k\Big) &= \Big(\sum_{i=1}^{m} a_i + a_{m+1}\Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^n b_k\Big) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{m} a_i\Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^n b_k\Big) + a_{m+1} \cdot \Big(\sum_{k=1}^n b_k\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^n a_i b_k + \sum_{k=1}^n a_{m+1} b_k \\
&= \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{k=1}^n a_i b_k\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Wir versuchen, die reellen Zahlen um zwei unendliche Zahlen $\pm\infty$ zu erweitern. Auf der Menge $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ definieren wir die Operationen $+$ und $\cdot$ folgendermaßen:

- Für $a, b \in \mathbb{R}$ sind $a + b$ und $a \cdot b$ die übliche Summe bzw. Produkt.
- Für $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}
a + \infty = \infty + a &= \infty\,, \\
a + (-\infty) = (-\infty) + a &= -\infty\,, \\
\infty + (-\infty) = (-\infty) + \infty &= 0\,.
\end{aligned}$$

- Für $a \in \mathbb{R}$ ist

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \begin{cases} \infty & \text{für } a > 0\,, \\ 0 & \text{für } a = 0\,, \\ -\infty & \text{für } a < 0\,, \end{cases}$$

$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \begin{cases} -\infty & \text{für } a > 0\,, \\ 0 & \text{für } a = 0\,, \\ \infty & \text{für } a < 0\,, \end{cases}$$

$$\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty\,,$$
$$\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty\,.$$

Wird $\mathbb{R}_\infty$ dadurch zu einem Körper? Überprüfen Sie, welche der Körperaxiome gelten.
Lösung. (A.2), (A.3) und (A.4) gelten, aber (A.1) gilt nicht:

$$\infty + (\infty + (-\infty)) = \infty + 0 = \infty$$
$$(\infty + \infty) + (-\infty) = \infty + (-\infty) = 0$$

(M.1), (M.2) und (M.3) gelten, aber (M.4) gilt nicht: Es gibt kein $x \in \mathbb{R}_\infty$ mit

$$\infty \cdot x = 1\,.$$

(D) Gilt nicht:

$$\infty(2 + (-1)) = \infty \cdot 1 = \infty$$
$$\infty \cdot 2 + \infty \cdot (-1) = \infty + (-\infty) = 0$$

Hausaufgaben

Aufgabe 3

Zeigen Sie per Induktion nach n, daß folgende Ungleichungen für jede natürliche Zahl $n \geq 4$ gelten:

(a) $2n + 1 < 2^n$

(b) $n^2 \leq 2^n$

Lösung. (a) Für $n = 4$ gilt

$$2 \cdot 4 + 1 = 9 < 16 = 2^4.$$

Für den Induktionsschritt gilt

$$2(n+1) + 1 = 2n + 3 < 2^n + 2 \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

(b) Für $n = 4$ gilt

$$4^2 = 16 = 2^4.$$

Für den Induktionsschritt gilt nach (a)

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + 2n + 1 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

Aufgabe 4

Beweisen Sie mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes folgende Ungleichung:

$$(1 + x)^n > \frac{1}{4} n^2 x^2 \qquad \text{für reelle Zahlen } x \geq 0 \text{ und natürliche Zahlen } n \geq 2\,.$$

Lösung. Für $n \geq 2$ gilt $\frac{n}{2} \leq \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}$. Für $x \neq 0$ erhalten wir somit

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k > \binom{n}{2} x^2 = \frac{n(n-1)}{2} x^2 = \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right) x^2 \geq \frac{n^2}{4} x^2\,.$$

Für $x = 0$ gilt offensichtlich $(1 + x)^n = 1 > 0 = \frac{1}{4} n^2 x^2$.