Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
16.10.2009

1. Übungsblatt zur „Analysis I“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Käferkunde)

Ein Käfer krabbelt auf den Kanten einer n-seitigen Pyramide (d.h $n \geq 3$, n Seitenflächen und eine Grundfläche). Sein Weg beginnt und endet im Mittelpunkt der selben Grundkante. Unterwegs durchläuft er jeden Punkt höchstens einmal. Zeige, dass ihm dazu $\#(n) := 1 + \frac{1}{2}n(n-1)$ verschiedene Wege zur Verfügung stehen. (Ein Weg soll hier immer aus mehr als einem Punkt bestehen. Zwei Wege gelten hier als gleich, wenn sie aus den selben Punkten bestehen.)

Lösung:
(IB) Für $n = 3$ ist die Aussage richtig (Durchzählen der Möglichkeiten).
(IA) Die Aussage sei wahr für ein $n \geq 3$.
(IS) Die Situation für eine $n+1$ seitige Pyramide kann aus dem Fall einer n-seitigen Pyramide hergeleitet werden. Seien $A_1, A_2 \ldots, A_n$ die Ecken der n seitigen Pyramide und M der Startpunkt des Käfers (O.B.d.A zwischen A_1 und A_n), dann definieren wir einen Punkt A_{n+1} zwischen A_n und M. Nun zählen wir die möglichen Wege. Jeder Weg muß über A_{n+1} gehen. Genau die Wege, die von A_n über A_{n+1} nach M gehen, gab es schon auf der n seitigen Pyramide (nach Induktionsanahme sind das $1 + \frac{1}{2}n(n-1)$ viele). Alle neuen Wege müssen von der Pyramidenspitze her über A_{n+1} nach M gehen. Da auch die Spitze nur höchstens einmal durchlaufen werden soll, sind das n weitere Wege.
Insgesamt gibt es daher $\#(n+1) = n + 1 + \frac{1}{2}n(n-1) = 1 + \frac{1}{2}(n+1)n$ Wege.

Aufgabe G2 (Induktion)

(a) Sei n_0 eine ganze Zahl und $A(n)$ eine von n abhängige Aussage. Zeigen Sie:

$$Q: \quad \text{Wenn } \forall n \geq n_0 \big(\forall m (n_0 \leq m < n \rightarrow A(m)) \rightarrow A(n)\big), \text{ dann } \forall n \geq n_0 A(n).$$

Das ist eine Variante des Prinzips der vollständigen Induktion.

(b) Wir haben in (a) gesehen, dass man das Prinzip der vollständigen Induktion

$$P: \quad \text{Wenn } A(n_0) \text{ und } \forall n \geq n_0 (A(n) \rightarrow A(n+1)), \text{ dann } \forall n \geq n_0 A(n),$$

benutzen kann, um das Prinzip Q zu beweisen. Zeigen Sie jetzt, dass man durch Anwendung von Q das Prinzip P beweisen kann. Dies zeigt in gewissem Sinn, dass P und Q “äquivalent” sind.

(c) Beweisen Sie:
Jede nichtleere Menge A natürlicher Zahlen hat ein Minimum, d.h. ein Element $n \in A$, sodass $\forall m \in A(n \leq m)$.
Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion.

(d) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion. Zeigen Sie:

$$\exists n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N}\big(f(n) \leq f(m)\big).$$

Lösung:

(a) Wir definieren für $n \in \mathbb{Z}$ die Aussage

$$B(n) :\equiv \forall m\big(n_0 \leq m < n \to A(m)\big).$$

Wir zeigen durch Induktion, dass $B(n)$ wahr ist für alle $n \geq n_0$. $B(n_0)$ ist wahr, da $n_0 \leq m < n_0$ falsch ist für alle m. Sei $n > n_0$. Wir nehmen an, dass $B(n)$ wahr ist. Wegen

$$\forall n \geq n_0\big(\forall m(n_0 \leq m < n \to A(m)) \to A(n)\big) \tag{1}$$

gilt $B(n) \to A(n)$. Es folgt also, dass $A(n)$ wahr ist. Andererseits folgt aus $B(n)$ und $A(n)$, dass $B(n+1)$ wahr ist. Also $\forall n \geq n_0 B(n)$.
Aus (1) folgt somit $\forall n \geq n_0 A(n)$.

(b) Wir nehmen an, dass $A(n_0)$ gilt und

$$\forall n \geq n_0\big(A(n) \to A(n+1)\big). \tag{2}$$

Wir müssen zeigen, dass (1) gilt, dann folgt aus Q dass $\forall n \geq n_0 A(n)$.
Für $n = n_0$ haben wir

$$\forall m(n_0 \leq m < n_0 \to A(m)) \to A(n_0),$$

da $A(n_0)$ wahr ist. Sei also $n > n_0$. Wir nehmen an,

$$\forall m(n_0 \leq m < n \to A(m)).$$

Dann gilt insbesondere $A(n-1)$, und aus (2) folgt $A(n)$. Also gilt (1), und damit $\forall n \geq n_0 A(n)$.

(c) Sei $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$. Wir nehmen an, dass A kein Minimum hat. $0 \notin A$, denn sonst wäre 0 das Minimum von A. Sei

$$B := \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in A(n < m)\}.$$

Dann gilt $0 \in B$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass $n \in B$. Dann ist auch $n+1 \in B$, da $n+1$ sonst das Minimum von A wäre. Per Induktion folgt also, dass $n \in B$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was ein Widerspruch ist zu $A \neq \emptyset$.

(d) Wir definieren

$$f[\mathbb{N}] := \{m \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N}(f(n) = m)\}.$$

Da $\emptyset \neq f[\mathbb{N}] \subseteq \mathbb{N}$, folgt aus (c), dass $f[\mathbb{N}]$ ein Minimum $k \in \mathbb{N}$ hat. Da $k \in f[\mathbb{N}]$, folgt, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $f(n) = k$. Es gilt also für alle $m \in \mathbb{N}$, dass

$$f(n) = k \leq f(m).$$

□

Hausübung

Aufgabe H1 (Induktion und Axiome) (2 Punkte)

Es seien $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Beweisen Sie: Gilt für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\prod_{i=1}^{m} (1 + a_i) > 2^n, \qquad \text{so folgt} \qquad \sum_{i=1}^{m} a_i > n.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $(1 + k) \leq 2^k$, für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Lösung:

Wir führen den Beweis indirekt. D.h. wir zeigen

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \leq n \qquad \Rightarrow \qquad \prod_{i=1}^{m} (1 + a_i) \leq 2^n.$$

Wir beweisen aber zuerst: $1 + k \leq 2^k$ für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit Induktion. 1. I.A.: $(k = 1)$ $1 + 1 \leq 2$ ist wahr.

2. I.S.: $(k \rightsquigarrow k + 1)$

$$1 + k + 1 \leq 1 + 2^k \leq 2^k + 2^k \leq 2^{k+1}.$$

Also folgt $1 + k \leq 2^k$ für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Damit folgt durch Anwendung von $1 + k \leq 2^k$ auf $k = a_i$

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{m} (1 + a_i) &\leq 2^{a_1} \cdot \ldots 2^{a_m} \\ &= 2^{(\sum_{i=1}^{m} a_i)} \\ &\leq 2^n \end{aligned}$$

nach Voraussetzung $\sum_{i=1}^{m} a_i \leq n$. $\square$

Aufgabe H2 (Binomialkoeffizient und vollständige Induktion) (2 Punkte)

Zeige mittels vollständiger Induktion, daß für alle $n, m, k \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage gilt:

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}.$$

Wobei wir $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$ setzen.

Lösung: Wir beweisen unsere Behauptung mittels vollständiger Induktion über m. Dabei benutzen wir die Formel $\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k}$ aus der Vorlesung (und Forster, Seite 5).

(I) Sei $m = 0$ und k, n beliebig. Dann erhält man:

$$\binom{n+0}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{0}{k-i}$$

Denn auf der rechten Seite sind alle Summanden gleich 0 bis auf den Fall $i = k$.

(IA) Die Aussage sei wahr für m.

(IS)

$$\binom{n+m+1}{k} - \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m+1}{k-i} = \binom{n+m}{k} + \binom{n+m}{k-1} - \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m+1}{k-i}$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}\binom{m}{k-1-i} - \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m+1}{k-i}$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}\left[\binom{m}{k-i} + \binom{m}{k-1-i}\right] + \binom{n}{k}\binom{m}{0} - \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m+1}{k-i}$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}\binom{m+1}{k-i} + \binom{n}{k}\binom{m+1}{0} - \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m+1}{k-i}$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m+1}{k-i} - \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m+1}{k-i} = 0$$

Also gilt die Aussage auch für $m+1$.