Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I

Tutorium 15

Aufgabe 1

Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^a \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

für $a > 1$ mit Hilfe Riemannscher Summen.

Hinweis. Wählen Sie die Unterteilung $1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = a$ mit $x_k := a^{k/n}$ für $0 \leq k \leq n$. Als Stützstellen können Sie $\xi_k := x_{k-1}$ verwenden.

Lösung. Für $f(x) := x^{-1}$ erhalten wir mit der Unterteilung und den Stützstellen aus dem Hinweis die Summe

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} a^{(-k+1)/n}\big(a^{k/n} - a^{(k-1)/n}\big) = \sum_{k=1}^{n}(a^{1/n} - 1) = n(a^{1/n} - 1)\,.$$

Die Feinheit der Unterteilung $1 < a^{1/n} < a^{2/n} < \dots < a^{(n-1)/n} < a$ ist

$$\eta_n := \max_{1 \leq k \leq n}\big(a^{k/n} - a^{(k-1)/n}\big) = \max_{1 \leq k \leq n} a^{k/n}(1 - a^{-1/n}) = a(1 - a^{-1/n})\,.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0$ folgt

$$\int_1^a \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{1/n} - 1}{1/n} = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - a^0}{h} = \frac{\mathrm{d}a^x}{\mathrm{d}x}(0) = \log(a)\,.$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, daß es genau ein Paar differenzierbarer Funktionen $c, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

(i) $c(0) = 1$ und $s(0) = 0$.

(ii) $c' = -s$ und $s' = c$.

Hinweis. Nehmen Sie an, es gäbe ein weiteres Paar f, g von Funktionen mit (i) und (ii), und betrachten Sie die Funktion

$$\varphi(x) = (f(x) - c(x))^2 + (g(x) - s(x))^2.$$

Lösung. Da sin und cos differenzierbar sind und Bedingungen (i) und (ii) erfüllen, gibt es ein Paar c, s wie oben. Um zu zeigen, daß diese beiden Funktionen die einzigen sind, betrachten wir zwei Paare c_1, s_1 und c_2, s_2 mit (i) und (ii). Wir müssen zeigen, daß $c_1 = c_2$ und $s_1 = s_2$. Sei

$$\varphi(x) := (c_2(x) - c_1(x))^2 + (s_2(x) - s_1(x))^2.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= 2(c_2(x) - c_1(x))(c_2'(x) - c_1'(x)) + 2(s_2(x) - s_1(x))(s_2'(x) - s_1'(x)) \\ &= 2(c_2(x) - c_1(x))(-s_2(x) + s_1(x)) + 2(s_2(x) - s_1(x))(c_2(x) - c_1(x)) = 0\,.\end{aligned}$$

Also ist φ konstant. Wegen $\varphi(0) = 0$ folgt $\varphi(x) = 0$ für alle x. Somit gilt wie gewünscht $c_1 = c_2$ und $s_1 = s_2$.

Aufgabe 3

Wir wissen bereits, daß eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine nicht-stetige Ableitung besitzen kann. Trotzdem kann eine Ableitung nicht beliebig „wild" werden. In dieser Aufgabe zeigen wir, daß jede Ableitung den Zwischenwertsatz erfüllt, auch wenn sie nicht stetig ist.

Sei $a < b$ in $\mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $f'(a) < \lambda < f'(b)$ gibt es einen Punkt $x \in]a, b[$ mit $f'(x) = \lambda$.

Lösung. Die Funktion $g(t) := f(t) - \lambda t$ ist stetig und nimmt somit ihr Minimum in einem Punkt x des kompakten Intervalls $[a, b]$ an. x ist verschieden von a und b, da wegen $g'(a) = f'(a) - \lambda < 0$ und $g'(b) = f'(b) - \lambda > 0$ Punkte $t_1, t_2 \in]a, b[$ existieren mit $g(t_1) < g(a)$ und $g(t_2) < g(b)$. Also ist x ein lokales Extremum und $g'(x) = 0$. Hieraus folgt $f'(x) = \lambda$.