Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I

Tutorium 14

Aufgabe 1

Sei $I :=]a, b[$ ein offenes Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit

- $\lim\limits_{x \nearrow b} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \nearrow b} g(x)$,
- $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und
- $\lim\limits_{x \nearrow b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$.

Zeigen Sie, daß

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty .$$

Lösung. Wie im Beweis von §16 Satz 9 können wir annehmen, daß g streng monoton wächst. Wegen $\lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ gibt es ein $x_0 \in I$ mit $f'(x) > 0$ für alle $x > x_0$. Durch Einschränkung von I können wir also annehmen, daß f' positiv ist. Also können wir auch annehmen, daß f streng monoton wächst. Wegen $\lim_{x \nearrow b} f(x) = 0 = \lim_{x \nearrow b} g(x)$ folgt dann, daß $f(x)$ und $g(x)$ beide negativ sind. Insbesondere ist $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$. Wegen

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$$

können wir §16 Satz 9 anwenden und erhalten

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 .$$

Hieraus folgt

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty .$$

Wegen $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ folgt, daß der Grenzwert ∞ ist.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \text{ mit ungeradem } n , \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f Rieman-integrierbar ist und berechnen Sie $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lösung. Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\varphi_k(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n} \text{ mit ungeradem } n \text{ und } n < 2k\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

$$\psi_k(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n} \text{ mit ungeradem } n \text{ und } n < 2k\,, \\ 1 & \text{für } x \le \frac{1}{2k+1}\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Dann ist $\varphi_k \le f \le \psi_k$ und

$$\int_0^1 \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \right) = \sum_{n=1}^{2k-1} (-1)^n \frac{1}{n}\,,$$

$$\int_0^1 \psi_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \right) + \frac{1}{2k+1} = \sum_{n=1}^{2k-1} (-1)^n \frac{1}{n} + \frac{1}{2k+1}\,.$$

Nach dem Leibnitzschen Kriterium konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}\,.$$

Es folgt, daß

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = \lim_{k\to\infty} \int_0^1 \psi_k(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Wegen

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \le \lim_{k\to\infty} \int_0^1 \psi_k(x)\,\mathrm{d}x$$

folgt

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}\,.$$