Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

27.01.2010

13. Tutorium Analysis I
Wintersemester 2009/2010

(T13.1)

In dieser Aufgabe werden wir folgenden überraschenden Satz beweisen:

Es gibt Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, aber nirgends differenzierbar sind.

Wir definieren dazu "Sägezahnfunktionen" ϕ_k: Sei $\phi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert, so dass $\phi_0(x) = |x|$ für $-1 \le x \le 1$ und $\phi_0(x+2n) = \phi_0(x)$ für $n \in \mathbb{Z}$, und sei für $k \in \mathbb{N}^*$ die Funktion $\phi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\phi_k(x) = 4^{-k}\phi_0(4^k x)$. (Skizzieren Sie den Graphen von ϕ_k für z.B. $k = 0, 1, 2$.)

(i) Zeigen Sie, dass man eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x)$ definieren kann.

(ii) Beweisen Sie, dass f stetig ist.

Hinweis: Man überlege zunächst, dass für $|x-y| \le 4^{-k_0}$ gilt

$$|\phi_k(x) - \phi_k(y)| \le \begin{cases} 4^{-k_0} & \text{falls } k < k_0, \\ 4^{-k} & \text{falls } k \ge k_0. \end{cases}$$

(iii) Beweisen Sie, dass f nirgends differenzierbar ist.

Hinweis: Wir sagen, die Punkte $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ *liegen an derselben Flanke* von ϕ_j, wenn ϕ_j zwischen x und y linear ist. Sei $\xi \in \mathbb{R}$. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ lässt sich die Zahl $h_j := \pm(1/2)4^{-j}$ so wählen, dass ξ und $\xi + h_j$ an derselben Flanke von ϕ_j liegen. Man beweise zunächst folgende Relation:

$$\frac{\phi_k(\xi+h_j) - \phi_k(\xi)}{h_j} = \begin{cases} \pm 1 & \text{falls } k \le j, \\ 0 & \text{falls } k > j. \end{cases}$$

Lösung.

(i) Es gilt $|\phi_k(x)| \le 4^{-k}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$. Also konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x)$ nach dem Majorantenkriterium für alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Sei $\varepsilon > 0$. Sei $k_0 \in \mathbb{N}$ und seien $x, y \in \mathbb{R}$, so dass $|x-y| \le 4^{-k_0}$. Da $0 \le \phi_k(t) \le 4^{-k}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$, und da die Flanken von ϕ_k die Steigung ± 1 aufweisen, gilt

$$|\phi_k(x) - \phi_k(y)| \le \begin{cases} 4^{-k_0} & \text{falls } k < k_0, \\ 4^{-k} & \text{falls } k \ge k_0. \end{cases}$$

Hieraus folgt aber

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\le \sum_{k=0}^{k_0-1} |\phi_k(x) - \phi_k(y)| + \sum_{k=k_0}^{\infty} |\phi_k(x) - \phi_k(y)| \\ &\le k_0 \cdot 4^{-k_0} + \frac{4^{-k_0}}{1-1/4} = \frac{k_0 + 4/3}{4^{k_0}}. \end{aligned}$$

Es gibt $N \in \mathbb{N}$, so dass für $k_0 \ge N$ gilt $(k_0 + 4/3)/4^{k_0} < \varepsilon$. Mit $\delta := 4^{-k_0}$ erhalten wir, dass für $|x-y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Somit ist f (sogar gleichmäßig) stetig.

(iii) Sei $\xi \in \mathbb{R}$. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ wählen wir die Zahl $h_j := \pm(1/2)4^{-j}$, so dass ξ und $\xi + h_j$ an derselben Flanke von ϕ_j liegen. Dann liegen ξ und $\xi + h_j$ auch an derselben Flanke von ϕ_k, für alle $k < j$. Für $k > j$ gilt $\phi_k(x + 2n \cdot 4^{-k}) = \phi_k(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$, und somit

$$\phi_k(\xi + h_j) = \phi_k(\xi).$$

Also gilt insgesamt

$$\frac{\phi_k(\xi+h_j) - \phi_k(\xi)}{h_j} = \begin{cases} \pm 1 & \text{falls } k \le j, \\ 0 & \text{falls } k > j. \end{cases}$$

Damit erhalten wir

$$\frac{f(\xi+h_j) - f(\xi)}{h_j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi_k(\xi+h_j) - \phi_k(\xi)}{h_j} = \sum_{k=0}^{j} \pm 1,$$

die Differenzenquotienten

$$\frac{f(\xi+h_j) - f(\xi)}{h_j} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

sind also abwechselnd gerade und ungerade ganze Zahlen. Wegen $\lim_{j\to\infty} h_j = 0$ kann somit der Differentialquotient

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h}$$

nicht existieren, d.h. f ist im Punkt ξ nicht differenzierbar.

■

(T13.2)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $\tilde{x} \in D$ und auf $D \setminus \{\tilde{x}\}$ differenzierbar. Zeigen Sie (mit Hilfe des Mittelwertsatzes), dass f differenzierbar im Punkt $\tilde{x}$ ist und $f'(\tilde{x}) = a$ gilt, falls $\lim_{x \to \tilde{x}} f'(x) = a$ gilt.

Lösung.

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $D \setminus \{\tilde{x}\}$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = \tilde{x}$. Wegen des Mittelwertsatzes gibt es zu jedem x_n ein $\xi_n \in]\min(\tilde{x}, x_n), \max(\tilde{x}, x_n)[$ mit

$$f'(\xi_n) = \frac{f(x_n) - f(\tilde{x})}{x_n - \tilde{x}}.$$

Es gilt

$$0 < |\xi_n - \tilde{x}| < |x_n - \tilde{x}|.$$

Also konvergiert $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\tilde{x}$ und

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(\tilde{x})}{x_n - \tilde{x}} = \lim_{n \to \infty} f'(\xi_n) = a.$$

Somit ist f in $\tilde{x}$ differenzierbar, und es gilt $f'(\tilde{x}) = a$.

■