Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I

Tutorium 12

Aufgabe 1

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende und differenzierbare Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) f' ist monoton wachsend.

(b) $(f^{-1})'$ ist monoton wachsend.

(c) Es gilt $f'(x) > 0$ für alle x.

(d) Es gilt $(f^{-1})'(x) > 0$ für alle x (im Definitionsbereich von $(f^{-1})'$).

Lösung. (a) ist falsch. $f(x) = \log x$ ist streng monoton wachsend, aber $f'(x) = x^{-1}$ ist monoton fallend.
(b) ist falsch. $f(x) = e^x$ ist streng monoton wachsend, aber $(f^{-1})' = x^{-1}$ ist monoton fallend.
(c) ist falsch. $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend, aber $f'(x) = 3x^2$ hat eine Nullstelle bei $x = 0$.
(d) ist wahr. Es gilt

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

und $f'(x) \geq 0$, da f streng monoton wachsend ist. Also ist $(f^{-1})'(x) > 0$ für alle x im Definitionsbereich von $(f^{-1})'$.

Aufgabe 2

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Wir definieren eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = \max\{f(x), g(x)\} .$$

(a) Zeigen Sie, daß F differenzierbar ist in jedem Punkt $x \in D$ mit $f(x) \neq g(x)$.

(b) Finden Sie f, g und x, so daß F im Punkt x nicht differenzierbar ist.

Lösung. (a) Sei $x \in D$ ein Punkt mit $f(x) \neq g(x)$. Dann gibt es ein offenes Intervall $(a, b) \subseteq D$ mit $a < x < b$, so daß $f(y) \neq g(y)$ für alle $y \in (a, b)$ gilt. Da f und g stetig sind, gilt entweder $f(y) < g(y)$ für alle $y \in (a, b)$ oder $f(y) > g(y)$ für alle $y \in (a, b)$. Wegen Symmetrie können wir das erstere annehmen. Dann ist $F(y) = g(y)$ für alle $y \in (a, b)$, und wir erhalten

$$F'(x) = \lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = \lim_{y \to x} \frac{g(y) - g(x)}{y - x} = g'(x) .$$

(b) Wir nehmen $D = (-1, 1)$, $f(x) = x$ und $g(x) = -x$. Dann ist $F(x) = |x|$ nicht in 0 differenzierbar.

Aufgabe 3

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $|f(x)| \leq x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß f im Punkt 0 differenzierbar ist und bestimmen Sie $f'(0)$.

(b) Finden Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche differenzierbar in 0, aber unstetig in jedem anderen Punkt ist.

Lösung. (a) Wegen $|f(x)| \leq x^2$ ist $|f(0)| \leq 0$, d. h. $f(0) = 0$. Somit gilt

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \frac{|f(x)|}{|x|} \leq \frac{x^2}{|x|} = |x| \,.$$

Für $x \to 0$ konvergiert dies gegen 0. Somit ist f in 0 differenzierbar und $f'(0) = 0$.

(b) Wir modifizieren die Dirichlet-Funktion (10.10). Sei

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Nach (a) ist f im Punkt 0 differenzierbar. Wir können ähnlich wie in (10.17) zeigen, daß f in keinem Punkt $x \neq 0$ stetig ist.