Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

13.01.2010

11. Tutorium Analysis I
Wintersemester 2009/2010

(T11.1)

Man bestimme alle stetigen Funktionen, die folgenden Funktionalgleichungen genügen:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

(ii) $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $g(xy) = g(x) + g(y)$.

(iii) $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $h(xy) = h(x)h(y)$.

Lösung.

(i) Wir werden zeigen, dass die stetigen Lösungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

die Funktionen f mit $f(x) = ax$ für ein $a \in \mathbb{R}$ sind.

Sei zunächst $a \in \mathbb{R}$, und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$. Dann ist f stetig, und für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y).$$

Also ist (1) erfüllt.

Sei umgekehrt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die die Funktionalgleichung (1) erfüllt. Sei $a := f(1)$. Für $n \in \mathbb{N}^*$ folgt aus (1), dass

$$f(nx) = nf(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, insbesondere $f(n) = nf(1) = na$. Weiter gilt

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0),$$

also $f(0) = 0$, und

$$f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x),$$

also $f(-x) = -f(x)$. Daher gilt $f(nx) = nf(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$. Sei $p/q \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Es gilt

$$a = f(1) = f\left(q \cdot \frac{1}{q}\right) = qf\left(\frac{1}{q}\right),$$

also $f(1/q) = a \cdot 1/q$, und somit

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(p \cdot \frac{1}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{p}{q}a.$$

Also gilt $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Sei jetzt $x \in \mathbb{R}$. Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von rationaler Zahlen, die gegen x konvergiert. Wegen der Stetigkeit von f gilt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} ax_n = ax.$$

Also gilt $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Wir werden zeigen, dass die stetigen Lösungen $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ der Funktionalgleichung

$$g(xy) = g(x) + g(y) \tag{2}$$

die Funktionen g mit $g(x) = a \log x$ für ein $a \in \mathbb{R}$ sind.

Sei zunächst $a \in \mathbb{R}$, und sei $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = a \log x$. Dann ist g stetig, und für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$g(xy) = a\log(xy) = a(\log x + \log y) = a\log x + a\log y = g(x) + g(y).$$

Also ist (2) erfüllt.

Sei umgekehrt $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die die Funktionalgleichung (2) erfüllt. Sei $f := g \circ \exp$. Dann ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, und es gilt

$$\begin{aligned} f(x+y) &= g(\exp(x+y)) \\ &= g(\exp(x)\exp(y)) \\ &= g(\exp(x)) + g(\exp(y)) \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Nach (i) gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, so dass $f(y) = ay$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Für $x > 0$ gilt also

$$g(x) = f(\log x) = a \log x.$$

(iii) Wir werden zeigen, dass die stetigen Lösungen $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ der Funktionalgleichung

$$h(xy) = h(x)h(y) \tag{3}$$

der Nullfunktion und die Funktionen h mit $h(x) = x^a$ für ein $a \in \mathbb{R}$ sind.

Sei zunächst $a \in \mathbb{R}$, und sei $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^a$. Dann ist h stetig, und für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
$$h(xy) = (xy)^a = x^a \cdot y^a = h(x)h(y).$$
Also ist (3) erfüllt. Die Funktion $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $h(x) = 0$, ist stetig und erfüllt trivialerweise die Funktionalgleichung.

Sei umgekehrt $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die die Funktionalgleichung erfüllt. Für alle $x > 0$ gilt
$$h(x) = h(\sqrt{x}\sqrt{x}) = h(\sqrt{x})^2 \geq 0.$$
Falls ein $x_0 > 0$ existiert mit $h(x_0) = 0$ folgt
$$h(x) = h\left(\frac{x}{x_0}\right) h(x_0) = 0 \quad \text{für alle } x > 0.$$
Falls h nicht die Nullfunktion ist, gilt also $h(x) > 0$ für alle $x > 0$. Sei in diesem Fall $g := \log \circ h$. Dann ist $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ stetig, und es gilt
$$g(xy) = \log(h(xy)) = \log(h(x)h(y)) = \log(h(x)) + \log(h(y)) = g(x) + g(y)$$
für alle $x, y > 0$. Nach (ii) gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ so dass $g(x) = a \log x$ gilt für alle $x > 0$, also
$$h(x) = \exp(g(x)) = \exp(a \log x) = x^a.$$
■

(T11.2)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Außerdem seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben und es gelte $f(a) > a$ und $f(b) < b$.

Zeigen Sie: f besitzt mindestens einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$.

Lösung.

Es sei
$$M := \{y \in \mathbb{R} : a \leq y \leq b,\, y \leq f(y)\}.$$
Es gilt dann $M \neq \emptyset$, da $a \in M$. Außerdem ist M beschränkt, da $a \leq y \leq b$ für alle $y \in M$. Wir setzen $z := \sup M$.

Wir beweisen nun $f(z) = z$.

Zuerst bemerken wir, dass $z \in [a, b]$. Denn aus $b < z$ würde folgen
$$b < b + \frac{z - b}{2} < z,$$
und somit wäre $b + (z - b)/2$ eine obere Schranke für M und echt kleiner als z.

1. Annahme $z > f(z)$.

Setze $\varepsilon := z - f(z)$. Da z das Supremum von M ist, existiert ein $x \in M$, so dass $x > z - \varepsilon$, d.h.
$$x > z - (z - f(z)) = f(z).$$
Denn sonst wäre $z - \varepsilon$ eine obere Schranke für M und echt kleiner als z. Außerdem gilt wegen $x \in M$, dass $x \leq z$. Also folgt mit der Monotonie von f die Ungleichung $f(x) \leq f(z)$. Also gilt
$$x > f(z) \geq f(x),$$
was einen Widerspruch zu $x \in M$ liefert.

2. Annahme $z < f(z)$.

Dann existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $z < x < f(z)$. Es folgt
$$x < f(z) \leq f(x),$$
da f monoton wachsend ist. Weiter gilt $a \leq z < x$, und von $z \leq b$ folgt $f(z) \leq f(b) < b$, also gilt $x \in [a, b]$.

Also gilt $x \in M$ und $z < x$, was wiederum einen Widerspruch liefert.

Damit sind beide Annahmen falsch, und es folgt somit $f(z) = z$.

■