Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I

Tutorium 10

Aufgabe 1

(a) Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to I$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, daß es einen Punkt $x \in I$ gibt mit $f(x) = x$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit Periode 2π, d. h. eine Abbildung so daß

$$f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

Zeigen Sie, daß es einen Punkt $x \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x + \pi) = f(x)\,.$$

(Intuitiv können wir f als eine Abbildung vom Einheitskreis S nach $\mathbb{R}$ betrachten. Dann entspricht $x + \pi$ dem Punkt, der x diametral gegenüber liegt. Wir suchen also zwei diametral gegenüberliegende Punkte, die denselben Funktionswert haben.)

Lösung. (a) Ist $f(a) = a$ oder $f(b) = b$, so ist nichts zu tun. Wir können also annehmen, daß $f(a) > a$ und $f(b) < b$ ist. Wir setzen $g(x) := f(x) - x$. Dann ist $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$g(a) = f(a) - a > a - a = 0 \quad \text{und} \quad g(b) = f(b) - b < b - b = 0\,.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also ein $x \in I$ mit $g(x) = 0$. Hieraus folgt $f(x) = x$.

(b) Wir setzten $g(x) := f(x + \pi) - f(x)$. Sei $z \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Punkt. Gilt $f(z + \pi) = f(z)$, so ist nichts zu tun. Nehmen wir also an, daß $f(z+\pi) > f(z)$. (Für $f(z+\pi) < f(z)$ verläuft der Beweis analog.) Dann ist $g(z) > 0$. Desweiteren ist

$$g(z + \pi) = f(z + 2\pi) - f(z + \pi) = f(z) - f(z + \pi) = -g(z) < 0\,.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also ein $x \in [z, z + \pi]$ mit $g(x) = 0$. Für dieses x gilt $f(x + \pi) = f(x)$.

Aufgabe 2

Sei $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d)$ der Baire-Raum aus Aufgabe (T3.1), und sei $(\mathbb{N}, \rho)$ der metrische Raum mit Metrik $\rho(m, n) = |m - n|$. Zeigen Sie, daß eine Abbildung $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ genau dann in einem Punkt $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ stetig ist, wenn eine Konstante $N \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $F(f) = F(g)$ gilt für alle Punkte $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mit $f(i) = g(i)$ für alle $i \leq N$, d. h. der Wert von $F(f)$ ist eindeutig durch ein Anfangsstück von f bestimmt.

Lösung. Stetigkeit von Funktionen zwischen metrischen Räumen kann ebenfalls mit dem ε-δ-Kriterium überprüft werden. Der Beweis ist völlig analog zum Beweis von §11 Satz 3.

($\Leftarrow$) Angenommen, daß ein $N \in \mathbb{N}$ wie oben existiert. Wir benutzen das ε-δ-Kriterium, um zu zeigen, daß F in f stetig ist.

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ setzen wir $\delta := 2^{-N}$. Ist $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ein Punkt mit $d(f, g) < \delta$, so gilt $f(i) = g(i)$ für alle $i \leq N$. Nach Annahme folgt hieraus $F(f) = F(g)$. Also ist wie gewünscht

$$\rho(F(f), F(g)) = 0 < \varepsilon\,.$$

($\Rightarrow$) Angenommen, daß es kein $N \in \mathbb{N}$ wie oben gibt. Wir benutzen das ε-δ-Kriterium, um zu zeigen, daß F nicht in f stetig ist.

Sei dazu $\varepsilon := 1$ und $\delta > 0$ beliebig. Wir wählen ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\delta > 2^{-N}$. Nach Annahme gibt es ein $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mit $F(f) \neq F(g)$ und $f(i) = g(i)$ für alle $i \leq N$. Also ist

$$d(f, g) < 2^{-N} < \delta \quad \text{und} \quad \rho(F(f), F(g)) \geq 1 \geq \varepsilon\,.$$

Aufgabe 3

Eine Teilmenge $D \subseteq X$ eines metrischen Raumes (X, d) heißt *beschränkt,* wenn eine Konstante $b > 0$ existiert mit

$$d(x, y) \le b \quad \text{für alle } x, y \in D\,.$$

Eine Funktion $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ zwischen metrischen Räumen ist *Lipschitz-stetig,* wenn eine Konstante $L > 0$ (die *Lipschitz-Konstante* von f) existiert mit

$$\rho(f(x), f(y)) \le L \cdot d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X\,.$$

f heißt *gleichmäßig stetig,* wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \text{für alle } x, y \in X \text{ mit } d(x, y) < \delta$$

gilt.

Sei (X, d) ein beschränkter metrischer Raum und (Y, ρ) ein beliebiger metrischer Raum.

(a) Zeigen Sie, daß jede Lipschitz-stetige Funktion $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ beschränkt ist (d. h. daß das Bild $\{ f(x) : x \in X \}$ von f beschränkt ist).

(b) Zeigen Sie, daß dies für gleichmäßig stetige Funktionen $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ nicht unbedingt der Fall sein muß.

Lösung. (a) Sei L die Lipschitz-Konstante von f und sei $b > 0$ eine Schranke für X. Für $x, y \in X$ gilt

$$\rho(f(x), f(y)) \le L \cdot d(x, y) \le Lb\,.$$

Also ist f beschränkt.

(b) Wir definieren zwei Metriken d und d_1 auf $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &d(x, y) := |x - y| \\ \text{und} \quad &d_1(x, y) := \begin{cases} |x - y| & \text{für } |x - y| \le 1\,, \\ 1 & \text{sonst}\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Identitätsfunktion $f : (\mathbb{R}, d_1) \to (\mathbb{R}, d) : x \mapsto x$ ist gleichmäßig stetig aber nicht beschränkt.