Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

09.12.2009

9. Tutorium Analysis I
Wintersemester 2009/2010

(T9.1)

Zeigen Sie, dass $f :]0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd,} \\ 0, & \text{falls } x \in]0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

stetig in allen $x \in]0,1] \setminus \mathbb{Q}$ ist.

Lösung.

Sei $x \in]0,1] \setminus \mathbb{Q}$, und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $]0,1]$, so dass $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Wir müssen zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x),$$

d.h.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und sei $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Wir setzen

$$M_k := \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } 1 \leq m \leq n \leq k \right\}.$$

Man beachte, dass M_k nur *endlich viele* Elemente enthält, die alle rational sind. Nach Voraussetzung ist x irrational, es gilt also $x \notin M_k$ und da M_k nur endlich viele Elemente hat, gilt

$$\delta := \min\{|x - y| : y \in M_k\} > 0.$$

Da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x - x_n| < \delta$ für alle $n \geq N$. Also gilt $x_n \notin M_k$ für alle $n \geq N$, und somit

$$|f(x_n)| < \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

Also gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

■

(T9.2)

Wir haben in (T3.2) Konvergenz von Folgen in metrischen Räumen behandelt. Sei (X,d) ein metrischer Raum, und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq N)(d(x_n, x_m) < \varepsilon).$$

Der Raum (X,d) heißt *vollständiger metrischer Raum*, falls jede Cauchy-Folge in X konvergiert. (Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in X$ konvergiert.)

Seien (X,d) und (Y,ρ) metrische Räume und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Die Funktion f heißt *stetig* in $x \in X$, falls für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, so dass

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Die Funktion f heißt *stetig*, falls f in jedem Punkt von X stetig ist.

Eine Funktion $f : X \to X$ heißt *Kontraktion*, falls ein $q \in]0,1[$ existiert, so dass

$$(\forall x, y \in X)\Big(d(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x,y)\Big). \tag{1}$$

Dabei heißt q *Kontraktionskonstante* von f.

(i) Sei (X,d) ein metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante $q \in]0,1[$. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(ii) Man beweise den *Fixpunktsatz von Banach:*
Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante $q \in]0,1[$. Sei $x_0 \in X$ beliebig und

$$x_{n+1} := f(x_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Dann besitzt f genau einen Fixpunkt, d.h. einen Punkt $z \in X$ mit $f(z) = z$, und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen z. Weiter gilt die Fehlerabschätzung

$$d(z, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q}\, d(x_1, x_0) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Fixpunkt von f konvergiert.

Lösung.

(i) Sei $x \in X$, und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, die gegen x konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_n, x) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wegen (1) gilt

$$d(f(x_n), f(x)) \leq q \cdot d(x_n, x) \leq d(x_n, x) < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$, und somit ist f stetig in x.

(ii) Sei $x_0 \in X$ beliebig und

$$x_{n+1} := f(x_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Für $n, p \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+p}) &= d(f^n(x_0), f^{n+p}(x_0)) = d(f^n(x_0), f^n(f^p(x_0))) \leq q^n \cdot d(x_0, f^p(x_0)) \\
&\leq q^n \cdot \Big(d(x_0, f(x_0)) + d(f(x_0), f^2(x_0)) + \ldots + d(f^{p-1}(x_0), f^p(x_0)) \Big) \\
&\leq q^n \cdot (1 + q + \ldots + q^{p-1}) \cdot d(x_0, f(x_0)) \\
&\leq q^n \left(\frac{1 - q^p}{1 - q} \right) d(x_0, f(x_0)). \qquad (3)
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, und, da (X, d) vollständig ist, gibt es ein $z \in X$, so dass

$$\lim_{n \to \infty} x_n = z.$$

Da f stetig ist, gilt

$$z = \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(z).$$

Also ist z ein Fixpunkt von f. Ist $u \in X$ ein weiterer Fixpunkt von f, so gilt

$$d(z, u) = d(f(z), f(u)) \leq q \cdot d(z, u),$$

woraus wegen $q < 1$ folgt $d(z, u) = 0$, also $u = z$.

Wir müssen noch zeigen, dass die Fehlerabschätzung (2) gilt. Aus (3) erhalten wir (durch Grenzübergang $p \to \infty$)

$$d(x_n, z) \leq q^n \left(\frac{1}{1 - q} \right) d(x_0, f(x_0)) = \frac{q^n}{1 - q} d(x_0, x_1).$$

■