Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I

Tutorium 8

Aufgabe 1

In §9 Satz 3 wurde gezeigt, daß jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ein Supremum besitzt. Zeigen Sie, daß diese Aussage das Vollständigkeits-Axiom und das archimedische Axiom impliziert, d. h. daß jeder geordnete Körper mit der Eigenschaft aus §9 Satz 3 diese beiden Axiome erfüllt.
Lösung. Sei K ein geordneter Körper und $N := \{1,\ 1+1,\ 1+1+1, \dots\} \subseteq K$.

Angenommen, K erfüllt nicht das archimedische Axiom. Dann ist N beschränkt. Also hat N ein Supremum $c := \sup N$. Da c die kleinste obere Schranke von N ist, kann $c-1$ keine obere Schranke sein. Somit gibt es ein $n \in N$ mit $c-1 < n$. Hieraus folgt $c < n+1 \in N$. Also ist c ebenfalls keine obere Schranke. Ein Widerspruch.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in K. Um das Vollständigkeits-Axiom zu überprüfen, müssen wir zeigen, daß $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert. Sei

$$A := \{\, b \in K : \text{es gibt unendlich viele } n \in \mathbb{N} \text{ mit } b \leq a_n \,\}\,.$$

Wir behaupten, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sup A$ konvergiert. Zunächst zeigen wir, daß $\sup A$ existiert. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $|a_m - a_n| < 1$ für $m, n \geq k$. Insbesondere ist $a_k - 1 < a_n < a_k + 1$ für alle $n \geq k$. Somit ist $a_k + 1$ eine obere Schranke von A und A enthält das Minimum von $a_0, \dots, a_k,\ a_k - 1$. Also ist A nicht-leer und nach oben beschränkt und $c := \sup A$ existiert.

Es bleibt zu zeigen, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen c konvergiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $|a_m - a_n| < \varepsilon/2$ für alle $m, n \geq k$. Insbesondere ist $a_k - \varepsilon/2 < a_n < a_k + \varepsilon/2$ für $n \geq k$. Hieraus folgt $a_k - \varepsilon/2 \in A$ und somit $a_k - \varepsilon/2 \leq c$. Für $n \geq k$ erhalten wir

$$a_n < a_k + \varepsilon/2 \leq c + \varepsilon\,.$$

Umgekehrt gibt es ein $b \in A$ mit $b > c - \varepsilon/2$. Also gibt es unendlich viele $m \in \mathbb{N}$ mit $a_m \geq b > c - \varepsilon/2$. Wir wählen ein solches m mit $m \geq k$. Für $n \geq k$ folgt dann

$$a_n > a_m - \varepsilon/2 > c - \varepsilon\,.$$

Wir erhalten also

$$|a_n - c| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq k\,.$$

Aufgabe 2

Wir sagen, daß eine Familie $\mathcal{F}$ von offenen Intervallen eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ *überdeckt,* wenn gilt

$$A \subseteq \bigcup_{(a,b)\in\mathcal{F}} (a,b)\,.$$

Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ hat die *Heine-Borel Eigenschaft,* wenn es zu jeder Familie $\mathcal{F}$ von offenen Intervallen, welche A überdeckt, eine endliche Teilmenge $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ gibt, die A ebenfalls überdeckt.

Zeigen Sie, daß jedes abgeschlossene Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ die Heine-Borel Eigenschaft besitzt.
Lösung. Sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall und $\mathcal{F}$ eine Familie offenere Mengen, welche $[a, b]$ überdeckt. Für $x \in [a, b]$ bezeichnen wir mit $n(x)$ die kleinste natürliche Zahl n (falls es sie gibt), so daß es Intervalle $(a_0, b_0), \dots, (a_n, b_n) \in \mathcal{F}$ gibt mit

$$[a, x] \subseteq (a_0, b_0) \cup \dots \cup (a_n, b_n)\,.$$

(Für $x < a$ setzen wir $n(x) := 1$.) Wir müssen zeigen, daß $n(b)$ existiert.

Sei c das Supremum aller Zahlen $x \in [a, b]$, so daß $n(x)$ existiert. Da $\mathcal{F}$ $[a, b]$ überdeckt, gibt es ein Intervall $(x, y) \in \mathcal{F}$ mit $c \in (x, y)$. Wegen $x < c < y$ existiert $n(x)$, d. h. es gibt $(a_0, b_0), \dots, (a_{n(x)}, b_{n(x)}) \in \mathcal{F}$ mit

$$[a, x] \subseteq (a_0, b_0) \cup \cdots \cup (a_{n(x)}, b_{n(x)}) .$$

Ist $c < b$, so gibt es ein $d \in [a, b]$ mit $c < d < y$. Wegen

$$[a, d] \subseteq (a_0, b_0) \cup \cdots \cup (a_{n(x)}, b_{n(x)}) \cup (x, y)$$

gilt dann aber $n(d) \leq n(x) + 1$. Insbesondere existiert $n(d)$. Dies ist ein Widerspruch zu $d > c$.

Also ist $c = b$. Wegen

$$[a, c] \subseteq (a_0, b_0) \cup \cdots \cup (a_{n(x)}, b_{n(x)}) \cup (x, y)$$

folgt wie gewünscht, daß $n(b) = n(c) \leq n(x) + 1$.