Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

25.11.2009

7. Tutorium Analysis I

Wintersemester 2009/2010

(T7.1)

Welche der folgenden Aussagen implizieren die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? Welche der Aussagen implizieren die Konvergenz? Welche sind sogar äquivalent zur Konvergenz?

(i) Die Folge $(n^2 a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert.

(ii) Für alle $n \geq 1$ gilt die Ungleichung $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$.

(iii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N}) \quad \left(\left|\sum_{n=n_0}^{n_0+p} a_n\right| < \varepsilon\right)$.

(iv) Die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\geq 1}$ konvergiert.

(v) $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\geq 1}$ ist eine Nullfolge.

(vi) $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\exists \varepsilon > 0)(\forall n \geq n_0) \quad \left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 - \varepsilon\right)$.

(vii) Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $1 > \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 - \frac{1}{n}$ für alle $n > n_0$.

(viii) Die Folge der Partialsummen $(s_m)_{m\geq 1}$, wobei $s_m := \sum_{n=1}^{m} a_n$, ist beschränkt.

(ix) Die Folge der Partialsummen $(s_m)_{m\geq 1}$, wobei $s_m := \sum_{n=1}^{m} a_n$, ist beschränkt und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Lösung.

Es bezeichne C die Aussage: “Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert”. Weiter sei AC die Aussage: “$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut”. Offensichtlich gilt $AC \Rightarrow C$, aber $C \not\Rightarrow AC$. Gilt also $S \Rightarrow AC$, dann gilt auch $S \Rightarrow C$ und $C \not\Rightarrow S$.

(i) $\Rightarrow AC$. Beweis: Da die Folge $(n^2 a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert, folgt, dass diese Folge beschränkt ist. Das heißt, es gibt ein $M \in \mathbb{R}$, so dass $|n^2 a_n| \leq M$ für alle $n \geq 1$. Dies impliziert, dass $|a_n| \leq \frac{M}{n^2}$ für alle $n \geq 1$. Also folgt AC aus dem Majorantenkriterium. Weiter gilt $C \not\Rightarrow$ (i) nach obiger Bemerkung.

(ii) $\not\Rightarrow C$. Als Gegenbeispiel dient zum Beispiel die harmonische Reihe.

(iii) $\Leftrightarrow C$. Diese Aussage ist äquivalent zur Aussage, dass die Partialsummen eine Cauchyfolge bilden. Eine Richtung folgt sofort. Für den Beweis “(iii) $\Rightarrow$ Die Partialsummen bilden eine Cauchyfolge”, sei n_0, so dass $\left|\sum_{n=n_0}^{n_0+p} a_n\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $p \in \mathbb{N}$. Für $k, p \in \mathbb{N}$ mit $k \leq p$ erhalten wir

$$\sum_{n=n_0+k}^{n_0+p} a_n = \sum_{n=n_0}^{n_0+p} a_n - \sum_{n=n_0}^{n_0+k-1} a_n,$$

und somit

$$\left|\sum_{n=n_0+k}^{n_0+p} a_n\right| \leq \left|\sum_{n=n_0}^{n_0+p} a_n\right| + \left|\sum_{n=n_0}^{n_0+k-1} a_n\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Damit gilt natürlich (iii) $\not\Rightarrow AC$.

(iv) $\not\Rightarrow C$. Als Gegenbeispiel wählen wir $a_n = 1$ für alle $n \geq 1$.

(v) $\Rightarrow AC$. Dies folgt unmittelbar aus dem Quotientenkriterium. Damit gilt auch $C \not\Rightarrow$ (v).

(vi) $\Rightarrow AC$. Dies folgt wiederum aus dem Quotientenkriterium.

(vii) $\not\Rightarrow C$. Als Gegenbeispiel wählen wir $a_n = 1/n$ für alle $n \geq 1$.

(viii) $\not\Rightarrow C$. Als Gegenbeispiel wählen wir $a_n = (-1)^n$ für alle $n \geq 1$.

(ix) $\not\Rightarrow C$. Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ definiert durch

$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \ldots$$

Offensichtlich gilt $\lim a_n = 0$. Für die Partialsummen $s_m := \sum_{n=1}^{m} a_n$ gilt $s_m \in [0, 1]$ für alle $m \geq 1$, also ist $(s_m)_{m\geq 1}$ beschränkt. Da $s_m = 1$ für unendlich viele $m \in \mathbb{N}$ und $s_m = 0$ für unendlich viele $m \in \mathbb{N}$, ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

■

(T7.2)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe reeller Zahlen. Man beweise:

(i) Zu beliebig vorgegebenem $c \in \mathbb{R}$ gibt es eine Umordnung $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$, die gegen c konvergiert.

(ii) Es gibt Umordnungen, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ bestimmt gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ divergiert.

(iii) Es gibt Umordnungen, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ weder konvergiert noch bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert.

Lösung.

(i) Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent ist, enthält sie unendlich viele positive und auch unendlich viele negative Terme. Sei $(a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ die Teilfolge der negativen Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ die Teilfolge der nichtnegativen Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\alpha_k := a_{n_k} \geq 0, \qquad \beta_k := -a_{m_k} > 0.$$

Wir zeigen zunächst, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty. \tag{1}$$

Wenn die beiden Reihen konvergent wären, dann wäre die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, im Widerspruch zur Voraussetzung. Falls

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k =: b < \infty$$

gelten würde, dann würde für $N \geq n_k$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \geq \sum_{i=0}^{k} a_{n_i} - \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i - b$$

gelten, also $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = \infty$, im Widerspruch zur Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Auf dieselbe Weise zeigt man, dass die Annahme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k =: a < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty$$

zum Widerspruch führt. Also gilt (1).

Wir werden jetzt die gewünschte Umordnung der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ definieren. Die Idee ist, zuerst gerade genug positive Terme aufzulisten, um eine Summe grösser als c

zu bekommen, dann gerade genug negative Terme, um die Summe kleiner als c zu machen, und so weiter. Genauer gesagt führen wir die Umordnung nach folgendem Schema durch, wobei $p_0 < p_1 < \ldots$ und $q_0 < q_1 < \ldots$ natürliche Zahlen sind, die induktiv bestimmt werden sollen:

$$\begin{array}{lcl}
\alpha_0 + \ldots + \alpha_{p_0} & - & \beta_0 - \ldots - \beta_{q_0} \\
+\alpha_{p_0+1} + \ldots + \alpha_{p_1} & - & \beta_{q_0+1} - \ldots - \beta_{q_1} \\
+\ldots\ldots\ldots & & \\
\vdots & & \\
+\alpha_{p_i+1} + \ldots + \alpha_{p_{i+1}} & - & \beta_{q_i+1} - \ldots - \beta_{q_{i+1}} \\
+\ldots\ldots\ldots & & \\
\vdots & &
\end{array}$$

Wir definieren jetzt die Zahlen $p_0 < p_1 < \ldots$ und $q_0 < q_1 < \ldots$ auf folgende Weise:

Induktionsanfang:

Wir setzen

$$p_0 := \min\left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \geq c\right\}, \qquad A_0 := \sum_{k=0}^{p_0} \alpha_k$$

und

$$q_0 := \min\left\{n \in \mathbb{N} : A_0 - \sum_{l=0}^{n} \beta_l < c\right\}, \qquad B_0 := A_0 - \sum_{l=0}^{q_0} \beta_l.$$

Induktionsschritt:

Seien $p_0, \ldots, p_i$, $q_0, \ldots, q_i$ und $A_0, \ldots, A_i$, $B_0, \ldots, B_i$ schon bestimmt so dass

$$A_i = \sum_{k=0}^{p_i} \alpha_k - \sum_{l=0}^{q_{i-1}} \beta_l \geq c,$$

$$B_i = \sum_{k=0}^{p_i} \alpha_k - \sum_{l=0}^{q_i} \beta_l < c.$$

Dann setzen wir

$$p_{i+1} := \min\left\{n \in \mathbb{N} : n > p_i \text{ und } B_i + \sum_{k=p_i+1}^{n} \alpha_k \geq c\right\}, \qquad A_{i+1} := B_i + \sum_{k=p_i+1}^{p_{i+1}} \alpha_k$$

und

$$q_{i+1} := \min\left\{n \in \mathbb{N} : n > q_i \text{ und } A_{i+1} - \sum_{k=q_i+1}^{n} \beta_k < c\right\}, \qquad B_{i+1} := A_{i+1} - \sum_{k=q_i+1}^{q_{i+1}} \beta_k.$$

Dies ist möglich, da $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty$.

Aus der Definition folgt $|A_i - c| \leq \alpha_{p_i}$ und $|B_i - c| \leq \beta_{q_i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Da $\lim_{i\to\infty} \alpha_{p_i} = 0$ und $\lim_{i\to\infty} \beta_{q_i} = 0$, folgt leicht, dass die umgeordnete Reihe gegen c konvergiert.

(ii) Wir machen die Lösung wie in (i), führen aber die Umordnung nach folgendem Schema durch, wobei $p_0 < p_1 < \dots$ natürliche Zahlen sind, die induktiv bestimmt werden sollen:

$$\begin{array}{lcl} \alpha_0 + \dots + \alpha_{p_0} & - & \beta_0 \\ +\alpha_{p_0+1} + \dots + \alpha_{p_1} & - & \beta_1 \\ + \dots\dots\dots & & \\ \vdots & & \\ +\alpha_{p_i+1} + \dots + \alpha_{p_{i+1}} & - & \beta_{i+1} \\ + \dots\dots\dots & & \\ \vdots & & \end{array}$$

Wir definieren jetzt die Zahlen $p_0 < p_1 < \dots$ auf folgende Weise:

Induktionsanfang:

Wir setzen

$$p_0 := \min\left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \geq 1 \right\}$$

und

$$A_0 := \sum_{k=0}^{p_0} \alpha_k.$$

Induktionsschritt:

Seien $p_0, \dots, p_i$ und $A_0, \dots, A_i$ schon bestimmt und

$$A_i = \sum_{k=0}^{p_i} \alpha_k - \sum_{l=0}^{i-1} \beta_l \geq i + 1.$$

Dann setzen wir

$$p_{i+1} := \min\left\{ n \in \mathbb{N} : n > p_i \text{ und } A_i - \beta_i + \sum_{k=p_i+1}^{n} \alpha_k \geq i + 2 \right\}$$

und

$$A_{i+1} := A_i - \beta_i + \sum_{k=p_i+1}^{p_{i+1}} \alpha_k.$$

Dies ist möglich, da $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty$. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ die gerade definierte Umordnung. Es gibt $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $l \geq N$ gilt $0 \leq \beta_l < 1$. Sei $M \in \mathbb{N}$ so dass $M > N$. Für $k > p_M + M$ gilt dann $\sum_{n=0}^{k} a_{\tau(n)} \geq M$, also gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)} = +\infty$.

Auf ähnliche Weise kann man eine Umordnung finden, die bestimmt gegen $-\infty$ divergiert.

(iii) Wir machen die Lösung wie in (i), führen aber die Umordnung nach folgendem Schema durch, wobei $p_0 < p_1 < \dots$ und $q_0 < q_1 < \dots$ natürliche Zahlen sind, die induktiv bestimmt werden sollen:

$$\begin{array}{lcl} \alpha_0 + \dots + \alpha_{p_0} & - & \beta_0 - \dots - \beta_{q_0} \\ +\alpha_{p_0+1} + \dots + \alpha_{p_1} & - & \beta_{q_0+1} - \dots - \beta_{q_1} \\ + \dots\dots\dots & & \\ \vdots & & \\ +\alpha_{p_i+1} + \dots + \alpha_{p_{i+1}} & - & \beta_{q_i+1} - \dots - \beta_{q_{i+1}} \\ + \dots\dots\dots & & \\ \vdots & & \end{array}$$

Wir definieren jetzt die Zahlen $p_0 < p_1 < \dots$ und $q_0 < q_1 < \dots$ auf folgende Weise:

Induktionsanfang:

Wir setzen

$$p_0 := \min\left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \geq 1 \right\}, \qquad A_0 := \sum_{k=0}^{p_0} \alpha_k$$

und

$$q_0 := \min\left\{ n \in \mathbb{N} : A_0 - \sum_{l=0}^{n} \beta_l \leq -1 \right\}, \qquad B_0 := A_0 - \sum_{l=0}^{q_0} \beta_l.$$

Induktionsschritt:

Seien $p_0, \dots, p_i$, $q_0, \dots, q_i$ und $A_0, \dots, A_i$, $B_0, \dots, B_i$ schon bestimmt so dass

$$A_i = \sum_{k=0}^{p_i} \alpha_k - \sum_{l=0}^{q_{i-1}} \beta_l \geq 1,$$

$$B_i = \sum_{k=0}^{p_i} \alpha_k - \sum_{l=0}^{q_i} \beta_l \leq -1.$$

Dann setzen wir

$$p_{i+1} := \min\left\{ n \in \mathbb{N} : n > p_i \text{ und } B_i + \sum_{k=p_i+1}^{n} \alpha_k \geq 1 \right\}, \quad A_{i+1} := B_i + \sum_{k=p_i+1}^{p_{i+1}} \alpha_k$$

und

$$q_{i+1} := \min\left\{ n \in \mathbb{N} : n > q_i \text{ und } A_{i+1} - \sum_{k=q_i+1}^{n} \beta_k \leq -1 \right\}, \quad B_{i+1} := A_{i+1} - \sum_{k=q_i+1}^{q_{i+1}} \beta_k.$$

Dies ist möglich, da $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty$.

Aus der Definition folgt, dass $A_i \geq 1$ und $B_i \leq -1$ für alle $i \in \mathbb{N}$, also konvergiert die umgeordnete Reihe nicht, und sie divergiert auch nicht bestimmt gegen $+\infty$ oder $-\infty$.

$\blacksquare$